1. Wyprowadzić wzór na mnożenie/dzielenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej.

2. Wyprowadzić układ trzech równań pomocnych przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej $z = a + bi$.

3. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2 zachodzi

$$\text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \text{b) } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{c) } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0.$$

4. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie

$$\begin{aligned}
z^2 + (1-4i)z - 6 - 2i &= 0. \\
z^2 - (4+i)z + 9 + 7i &= 0. \\
(1+i)\,z^2 - (2+4i)\,z + (1+7i) &= 0. \\
(1+i)\,z^2 - (4+2i)\,z + (7+i) &= 0. \\
(1+2i)z^2 - (2+9i)z - 5 + 25i &= 0. \\
(2-i)\,z^2 - (7-6i)z + 11 - 23i &= 0. \\
(1+i)z^2 - (4+6i)z + 7 + 9i &= 0. \\
(1-i)z^2 - (4-2i)z + 7 - 9i &= 0.
\end{aligned}$$

5. Omówić postać trygonometryczną liczby zespolonej. Obliczyć (wyniki pozostawić w postaci algebraicznej)

$$\left(\tfrac{1+\sqrt{3}i}{-2+2i}\right)^{20}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}, \quad \tfrac{(2-2i)^{17}}{(1-\sqrt{3}i)^{21}}, \quad (-1+i)^{17}(\sqrt{3}-i)^{21},$$

$$\tfrac{(3-3i)^{10}}{(-1-\sqrt{3}i)^{12}}, \quad \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(1+i)^8}, \quad \left(\frac{-1+5i}{2+3i}\right)^6, \quad \tfrac{(-2+2i)^{22}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}{(\sqrt{3}-i)^{21}}.$$

6. Podać wzór na pierwiastki $n-$tego stopnia z liczby zespolonej z. Wyznaczyć pierwiastki zespolone 3-go stopnia z liczby z

$$z = 1, \qquad z = -1, \qquad z = -\sqrt{3} + i,$$
$$z = -8i, \quad z = -8 + 8\sqrt{3}i,$$

7. Podać **definicję** macierzy odwrotnej do macierzy A. Rozwiązać podany układ równań na dwa sposoby (metodą Cramera oraz rozwiązując odpowiednie równanie macierzowe)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ x - y + 2z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

8. Podać definicję wyznacznika macierzy. Obliczyć (wykorzystując odpowiednie operacje na wyznacznikach)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Podać przykład macierzy kwadratowej, do której nie istnieje macerz odwrotna. Obliczyć $B^2 - 4AC$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Omówić równanie parametryczne prostej w przestrzni $\mathbb{R}^3$. Niech będą dane punkty $A(1,2,3)$, $B(-1,0,2)$, $C(3,2,-2)$ oraz $D(-5,18,1)$.
a) Wyznaczyć równanie płaszczyzny π_{ABC}. Uzasadnić poprawność wyniku.
b) Wyznaczyć punkt D' symetryczny do punktu D względem płaszczyzny π_{ABC}.
c) Wyznaczyć odległość punktu D od płaszczyzny π_{ABC}.
d) Wyznaczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

11. Omówić równanie płaszczyzny w przestrzni $\mathbb{R}^3$. Niech będą dane punkty $A(2,-1,3)$, $B(1,0,-2)$, $C(-1,1,2)$ oraz $D(9,15,-6)$.
a) Wyznaczyć równanie płaszczyzny π_{ABC}. Uzasadnić poprawność wyniku.
b) Wyznaczyć punkt D' symetryczny do punktu D względem płaszczyzny π_{ABC}.
c) Wyznaczyć odległość punktu D od płaszczyzny π_{ABC}.
d) Wyznaczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$.

---

12. Naszkicować wykres funkcji f i podać jej własności (dziedzina, przeciwdziedzina, monotoniczność, ograniczoność, parzystość, ...), gdzie

$$\begin{array}{cccc} f(x) = \cos x, & f(x) = \mathrm{tg} x, & f(x) = \arcsin x, & f(x) = \mathrm{arcctg} x, \\ f(x) = 2^x, & f(x) = e^x, & f(x) = (\frac{1}{3})^x, & f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, \\ f(x) = \ln x, & f(x) = \sin x, & f(x) = \mathrm{ctg} x, & f(x) = \arccos x, \\ f(x) = \log_5 x, & f(x) = \mathrm{arctg} x. & & \end{array}$$

13. Podać defincję granicy właściwej ciągu (a_n). Obliczyć

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 - 3n + 5} - 2n\right), & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} - \sqrt{2n^2 + 2n + 2}\right), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2 - 5n + 2} - 2n\right), & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n - 7} - \sqrt{n^2 + 4n + 2}\right), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2-4n+5}, & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+3}\right)^{-4n+3}, \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-2n+5}{n^2+n-3}\right)^{3n-1} & \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n+5}{n^2+2n-3}\right)^{-3n+1}, \\ \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x^2-x-6}, & \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}, \end{array}$$

14. Podać twierdzenie (regułę) de l'Hospitala. Obliczyć

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \tfrac{\ln x}{x},$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right), \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)\cdot \mathrm{tg}\, x,$$

15. Podać definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0 i wykorzystać ją do wyznaczenia pochodnej funkcji $f(x) = \sqrt{7-3x}$ w punkcie $x_0 = 2$

16. Obliczyć ze wzorów pochodne następujących funkcji (o ile to możliwe, wynik pozostawić w najprostszej postaci)

$$
\begin{array}{lll}
y = \sin x - x\cos x, & y = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x, & y = \frac{1}{2}\arcsin^2 x, \\
y = \frac{1}{2}\arctan^2 x, & y = x - \operatorname{arctg} x, & y = \frac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right), \\
y = \sqrt{4-x^3}\left(\frac{2}{9}x^3 - \frac{8}{9}\right), & y = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2, & y = x\arcsin x + \sqrt{(1-x^2)} + c, \\
y = x\ln x - x + c, & y = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, & y = \frac{3x^2}{7x^5-x+2}, \\
y = \arccos\sqrt{1-3x}, & y = \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{x}}, & y = e^{\cos^2 x}, \\
y = \ln^7 \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sin(x^3-2x)} & y = \operatorname{arctg}^{10} \dfrac{3^{\sin^2 x}}{\log_4(3-x^3)} & y = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}, \\
y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), & y = x^2\ln(\cos\frac{x}{2})^3, & y = \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2}, \\
y = \frac{1}{2}\ln^2 x, & y = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right), & y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right), \\
y = \operatorname{arctg}(\frac{x+2}{1-2x}), & y = \sin(x\arcsin x), & y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{x^2+1}),
\end{array}
$$

17. Zbadać ekstrema lokalne, monotoniczność następujących funkcji

$$
\begin{array}{ccc}
f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}, & f(x) = \dfrac{2x+1}{x-4}, & f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}, \\
f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}, & f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x, & f(x) = \cos x - \ln\cos x, \\
f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, & f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}, & f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}, \\
f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, & f(x) = \dfrac{e^x}{x}, & f(x) = \dfrac{x}{e^x},
\end{array}
$$

18. Znaleźć punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości wykresów funkcji

$$
\begin{array}{ccc}
f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, & f(x) = \dfrac{x}{1-x^2} & f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} \\
f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, & f(x) = \dfrac{e^x}{x}, & f(x) = \dfrac{x}{e^x}, \\
y = x + \frac{4}{x}, & y = (x+2)\operatorname{arctg} x, &
\end{array}
$$

19. Narysować wykres funkcji

$$
\begin{array}{ccc}
f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x, & f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, & f(x) = xe^x, \\
f(x) = x^2\ln x, & f(x) = e^{-x^2}, & f(x) = (1+x^2)e^x, \\
f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}. & &
\end{array}
$$

20. Podać wzór Taylora. Rozwinąć funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x}$ w szereg Taylora dla $x_0 = 1$ i $n = 5$.

21. Obliczyć (wynik sprawdzić)

1) $\int x \sin x dx$; 2) $\int x^2 \sin x dx$; 3) $\int x \cos x dx$; 4) $\int x^2 \cos x dx$;
5) $\int x e^x dx$; 6) $\int x^2 e^x dx$; 7) $\int x \ln x dx$; 8) $\int x^2 \ln x dx$;
9) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; 10) $\int \ln x dx$; 11) $\int x \sqrt[5]{3 - 4x^2} dx$; 12) $\int \frac{x^3}{\sqrt[7]{2+5x^4}} dx$;
13) $\int \frac{1}{(2x+3)^{17}} dx$; 14) $\int (4 - 5x)^{13} dx$; 15) $\int \sin(1 - 4x) dx$; 16) $\int \operatorname{tg} x dx$;
17) $\int \operatorname{ctg} x dx$; 18) $\int \operatorname{arctg} x dx$; 19) $\int \operatorname{arcctg} x dx$; 20) $\int \arcsin x dx$;
21) $\int \arccos x dx$; 22) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; 23) $\int \frac{1}{3x-4} dx$; 24) $\int \frac{1}{\sqrt{3x-4}} dx$;
25) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4)^2}} dx$; 26) $\int \frac{1}{1+(3x-4)^2} dx$; 27) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 28) $\int \frac{(\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
29) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; 30) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^7}{1+x^2} dx$;