

1 Funkcje wielu zmiennych

1. Wyznaczyć dziedzinę oraz pochodne cząstkowe danych funkcji względem każdej ze zmiennych

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - y, & f(x, y) &= x^3y - y^3x, & f(x, y) &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, & f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \\ f(x, y) &= x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}, & f(x, y) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), & f(x, y) &= \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & f(x, y) &= \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{x}{y}}, \\ f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2), & f(x, y) &= \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{x}{y} \right) \right), & f(x, y) &= e^{-\frac{x}{y}}, & f(x, y) &= xy \ln(x + y), \\ f(x, y) &= (5x^2y - y^3 + 7)^3, & f(x, y) &= x^y, & f(x, y) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{y/x}. \end{aligned}$$

2. Dana jest funkcja $f(x, y) = \frac{y}{x^2 - y^2}$. Sprawdzić, że

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y)}{y^2}.$$

3. Dana jest funkcja $f(x, y) = 2 \sin y - \sin x$. Sprawdzić, że

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos x + \frac{\partial f}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$

4. Dana jest funkcja $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$. Sprawdzić, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

5. Dana jest funkcja $f(x, y) = \frac{y}{y^2 - 4x^2}$. Sprawdzić, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

6. Zbadać ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 29, \text{ Odp.: } \{-77\}, \text{ at } \{[x = 5, y = 6]\}$$

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1, \text{ Odp.: } \{1\}, \text{ at } \{[x = -1, y = 2]\}$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2, \text{ Odp.:}$$

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5, \text{ Odp.: } \{-7\}, \text{ at } \{[x = 0, y = -1]\}$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \text{ Odp.:}$$

$$f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \text{ Odp.: } \{3\sqrt[3]{4}\}, \text{ at } \left\{ \left[x = \frac{1}{4}4^{\frac{2}{3}}, y = \frac{1}{4}4^{\frac{2}{3}} \right] \right\}$$

$$f(x, y) = 3x^2y(4 - x - y)$$