III) Równania różniczkowe liniowe jednorodne.

Postać: $y' + p(x)y = 0$.
Wówczas: $y = ce^{-\int p(x)dx}$.

1. Rozwiązać równanie $y' - \frac{2x-1}{x^2}y = 0$. Zauważmy, że jest to równanie jednorodne (RJ), bo jest postaci $y' + p(x)y = 0$, gdzie $p(x) = -\frac{2x-1}{x^2}$. To korzystając z wyprowadzonego wzoru na $CORJ$, mamy

$$\begin{aligned} y &= ce^{-\int -\frac{2x-1}{x^2}dx} = ce^{\int\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx} = \\ &= ce^{2\ln|x|+\frac{1}{x}} = ce^{\ln x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}} = cx^2e^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

Rozwiązać równania (na dwa sposoby: z gotowego wzoru oraz traktując równania jednorodne jak równania o zmiennych rozdzielonych)

a) $y' - \operatorname{tg} xy = 0$, (Odp.: $y = \frac{c}{\cos x}$), *b)* $y' + \operatorname{ctg} xy = 0$, (Odp.: $y = \frac{c}{\sin x}$),

c) $y' + \frac{1}{x^2}y = 0$, (Odp.: $y = ce^{\frac{1}{x}}$), *d)* $y' - \frac{1}{x}y = 0$, (Odp.: $y = cx$).

III) Równania różniczkowe liniowe niejednorodne.

Postać: $y' + p(x)y = q(x)$.
Wówczas stosujemy metodę uzmienniania stałej.

1. Rozwiązać równanie $y' - 3y = 2$.Zauważmy, że jest to równanie niejednorodne, bo jest postaci $y' + p(x)y = q(x)$, gdzie $p(x) = -3$ oraz $q(x) = 2$. Stosując metodę uzmienniania stałej:

i) rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y' - 3y = 0 \iff y = ce^{-\int -3dx} = ce^{3x}.$$

ii) uzmienniamy stałą c, tzn. w miejsce stałej c podstawiamy funkcję $u(x)$ (z wykładu wiemy, że taka funkcja musi istnieć) i twierdzimy, że

$$y = u(x)e^{3x}$$

jest całką ogólną wyjściowego równania niejednorodnego. Czyli musi spełniać to równanie, tzn.

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 2 \iff \\ \left(u(x)e^{3x}\right)' - 3u(x)e^{3x} &= 2 \iff \\ u'(x)e^{3x} + u(x)3e^{3x} - -3u(x)e^{3x} &= 2 \iff \\ u'(x)e^{3x} &= 2 \iff \\ u'(x) &= 2e^{-3x} \iff \\ u(x) &= \int 2e^{-3x}dx = -\frac{2}{3}e^{-3x} + c. \end{aligned}$$