II) Równania różniczkowe jednorodne względem x i y.

Postać: $y' = f(\frac{y}{x})$.
Podstawienie: $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, to $y' = u'x + u$.

1. Rozwiązać równanie $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.

   Podstawiamy $u = \dfrac{y}{x}$ i $y' = u'x + u$. Mamy

$$\begin{aligned} & & y' &= \frac{y^2}{x^2} - 1 \iff u'x + u = u - 1 \iff u'x = -1 \Leftarrow \\ \frac{du}{dx} \cdot x = -1 \Big| \cdot dx \cdot \frac{1}{x} & \overset{\text{równanie o zm. rozdz.}}{\iff} & du &= -\frac{1}{x}dx \iff \int du = -\int \frac{1}{x}dx \iff \\ & & u &= -\ln|x| + c \iff \frac{y}{x} = c - \ln|x| \iff y = cx - \end{aligned}$$

Sprawdzenie: pokażmy, że $y' - \dfrac{y}{x} + 1 = 0$. Istotnie

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} + 1 &= (cx - x\ln|x|)' - \frac{cx - x\ln|x|}{x} + 1 = \\ &= c - \ln|x| - 1 - c + \ln|x| + 1 = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązać równania

$a)$ $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$, (odp.: $y = \pm\sqrt{(2\ln|x| \cdot x^2 + c \cdot x^2)}$),

$b)$ $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$, (odp.: $y = -x\ln(c - \ln|x|)$),

$c)$ $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, (odp.: $y = xe^{cx-1}$).