Sprawdzenie: $y = 5 - c(\cos x)$, to $y' = c(\sin x)$. Zatem

$$y'\mathrm{ctg}x + y - 5 = c(\sin x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + (5 - c(\cos x)) - 5 = 0.$$

3. Rozwiązać równanie $(xy^2 + x) + (y - x^2y) \cdot y' = 0$.
Sprawdzamy czy zmienne rozdzielą się, czyli czy istotnie jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.
Mamy

$$\begin{aligned}
(xy^2 + x) + (y - x^2y) \cdot y' &= 0 \iff \\
x(y^2+1) + y(1-x^2) \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \iff \\
y(1-x^2) \cdot \frac{dy}{dx} = -x(y^2+1) \Big| \cdot dx \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{y^2+1} & \iff \\
\frac{y}{y^2+1} dy &= \int \frac{-x}{1-x^2} dx \text{ - zmienne rozdzieliły}
\end{aligned}$$

To

$$\begin{aligned}
\int \frac{y}{y^2+1} dy &= \int \frac{-x}{1-x^2} dx \iff \\
\frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2+1} dy &= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx \iff \\
\frac{1}{2} \ln |y^2+1| &= \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c.
\end{aligned}$$

Uwaga: jeżeli w równaniu pozbędziemy się pochodnych oraz całek a wyznaczenie funkcji y jest trudne, to za rozwiązanie przyjmujemy ostatnią postać, tzw. postać uwikłaną. Czyli $\frac{1}{2} \ln |y^2+1| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c$ jest rozwiązaniem równania $(xy^2 + x) + (y - x^2y) \cdot y' = 0$ w postaci uwikłanej. Sprawdzenie - pomijamy.
Rozwiązać równania

$a)$ $xy' = 1 - x^2$, (odp.: $y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + c$),
$b)$ $\sqrt{1-x^2} \cdot y' - 1 = 0$, (odp.: $y = \arcsin x + c$),
$c)$ $y'\mathrm{tg}x - y = 2$, (odp.: $y = c \sin x - 2$),
$d)$ $x^2 \cdot y' = \sin \frac{1}{x}$, (odp.: $y = \cos \frac{1}{x} + c$),
$d)$ $y' = \frac{\mathrm{tg}y}{x}$, (odp.: $y = \arcsin(cx)$).