//

Zadania 3

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO

I) Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych.

Postać: $g(y)dy = f(x)dx$.
Uwaga: zamiast y' piszemy $\frac{dy}{dx}$ i przekształcamy wyjściowe równanie.

1. Rozwiązać równanie $yy' - \frac{1-2x}{y} = 0$.
   Sprawdzamy czy zmienne rozdzielą się, czyli czy istotnie jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.
   Mamy

$$\begin{aligned} yy' - \frac{1-2x}{y} &= 0 \iff yy' = \frac{1-2x}{y} \iff \\ y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y} \Bigg| \cdot dx \cdot y &\iff \\ y^2 dy &= (1-2x)dx \iff \int y^2 dy = \int (1-2x)dx \iff \\ \frac{y^3}{3} &= x - x^2 + c \iff y = \left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Sprawdzenie $y = \left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}}$, to $y' = \frac{1}{3}\left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3(1-2x) = \left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-2x)$. Zatem

$$\begin{aligned} yy' - \frac{1-2x}{y} &= \\ \left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1-2x) - \frac{1-2x}{\left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}}} &= \\ \frac{1-2x}{\left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1-2x}{\left(3\left(x - x^2 + c\right)\right)^{\frac{1}{3}}} &= 0. \end{aligned}$$

2. Rozwiązać równanie $y'\mathrm{ctg}x + y - 5 = 0$.
   Sprawdzamy czy zmienne rozdzielą się, czyli czy istotnie jest to równanie o zmiennych rozdzielonych.
   Mamy

$$\begin{aligned} y'\mathrm{ctg}x + y - 5 &= 0 \iff \mathrm{ctg}x \cdot \frac{dy}{dx} = 5 - y \Bigg| \cdot dx \cdot \mathrm{tg}x \cdot \frac{1}{5-y} \iff \\ \frac{1}{5-y}dy &= \mathrm{tg}x dx \iff \int \frac{1}{5-y}dy = \int \mathrm{tg}x dx \iff \\ -\ln|5-y| &= -\ln|\cos x| + c \overset{-c=c}{\iff} \ln|5-y| = \ln|\cos x| + c \overset{\ln c = c}{\iff} \\ \ln|5-y| &= \ln|\cos x| + \ln c \iff \ln|5-y| = \ln|c(\cos x)| \iff \\ |5-y| &= |c(\cos x)| \overset{\text{opuszczamy } ||}{\iff} 5 - y = \pm c(\cos x) \overset{\pm c = c}{\iff} \\ 5 - y &= c(\cos x) \iff y = 5 - c(\cos x). \end{aligned}$$