[redacted]

Obliczyć całki oznaczone:

1. $\int\limits_2^3 \frac{1}{2x+5}dx$. Zauważmy, że obszar całkowania zawiera sie w dziedzinie funkcji podcałkowej, tzn. $[2,3] \subset D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

Uwaga: W poniższych przykadach obszar całkowania będzie się zawsze zawierał w dziedzinie funkcji.

Obliczamy całkę nieoznaczoną korzystając ze wzoru

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x).$$

Mamy

$$\int \frac{1}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+5) + c.$$

Wówczas (podstawiamy do funkcji pierwotnej $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x+5)$ najpierw górną granicę całkowania, a następnie dolną granicę całkowania i odejmujemy te wartości od siebie - Główne twierdzenie rachunku całkowego)

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{2x+5}dx &= \left(\frac{1}{2}\ln(2x+5)\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{1}{2}\ln(2\cdot\mathbf{3}+5)\right) - \left(\frac{1}{2}\ln(2\cdot\mathbf{2}+5)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\ln 11 - \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{9} \end{aligned}$$

Uwaga dotycząca interpretacji geometrycznej wyniku: Ponieważ na przedziale $[2,3]$ funkcja $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ jest nieujemna, więc liczba $\frac{1}{2}\ln\frac{11}{9}$ jest polem między osią ox a wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ dla $x \in [2,3]$.