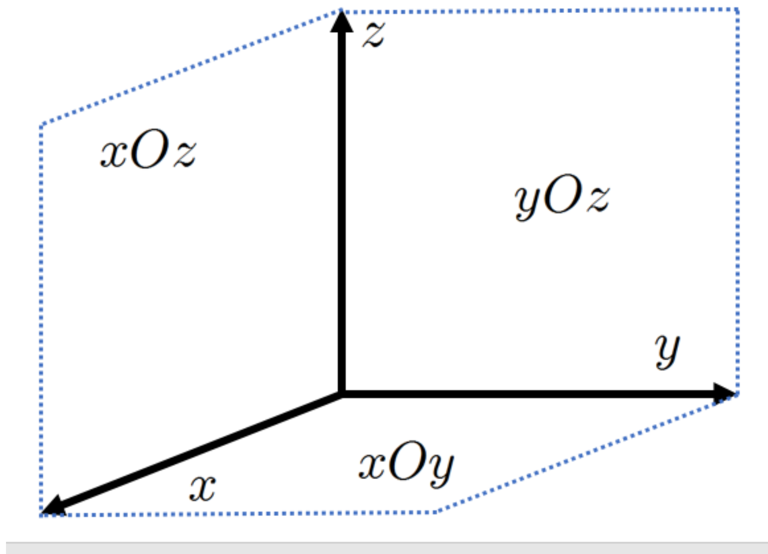
Wykład nr 4. FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH

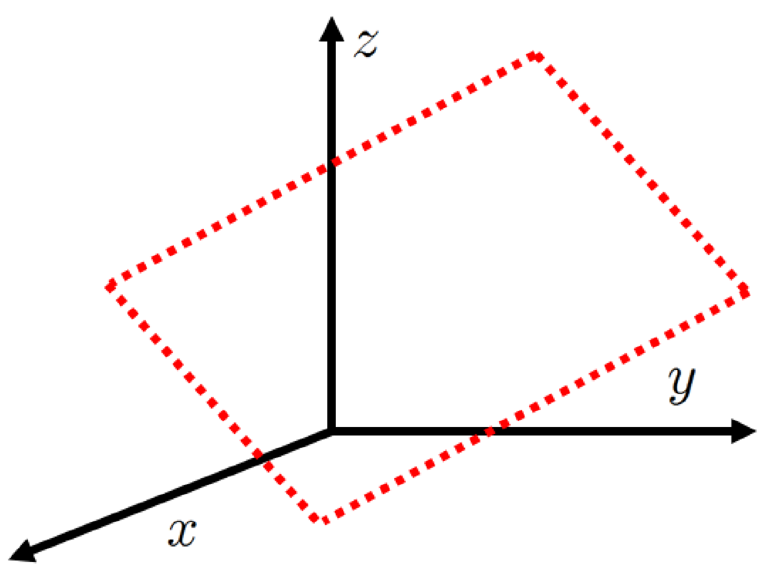
Niech $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ oraz niech $f : \mathbb{R}^2 \supseteq X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ze zbioru X w zbiór $\mathbb{R}$. Funkcję f nazywamy funkcją dwóch zmiennych. Piszemy przy tym $z = f(x,y)$.

Zauważmy, że wykresy funkcji dwóch zmiennych tworzymy w przestrzeni trójwymiarowej (analogicznie wykresy funkcji jednej zmiennej rysujemy w przestrzni dwuwymiarowej). Przyjmujemy następującą oriętację w przestrzeni trójwymiarowej:

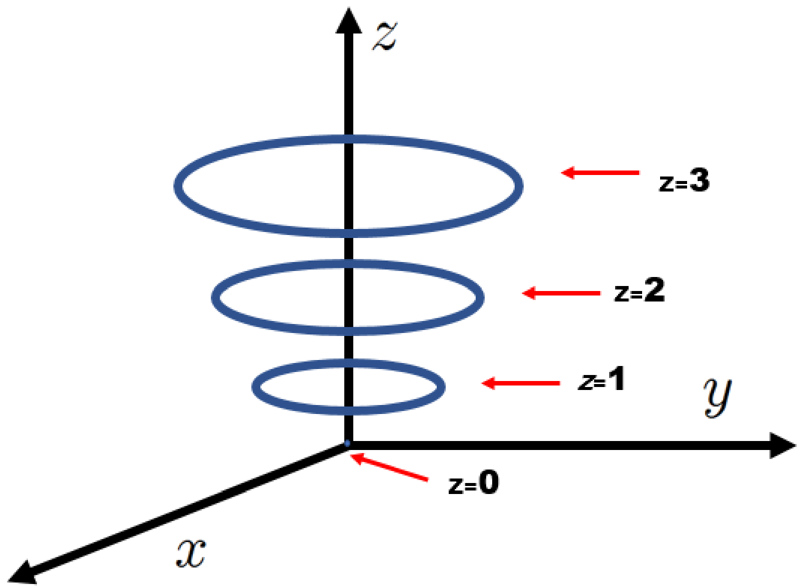


Wykresy niektórych funkcji dwóch zmiennych:

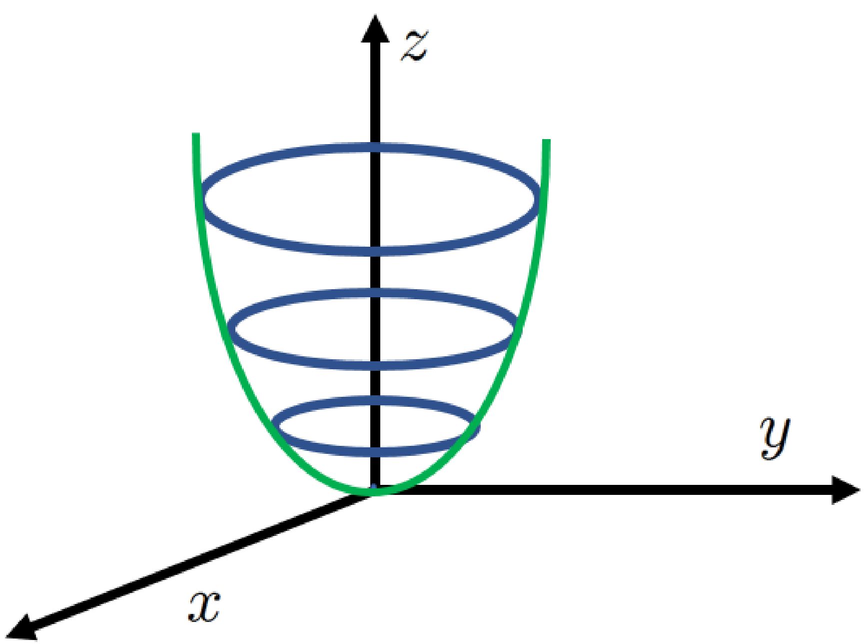
1. Równanie $z = f(x,y) = Ax + By + C$ opisuje płaszczyznę w przestrzeni trówymiarowej.
   Zauważmy, że równanie $z = C$ opisuje płaszczyznę równoległą do płaszczyzny xOy.
   Dodtkowo, równania $x = D$ oraz $y = E$ opisują równania płaszczyzn równoległych do płszczyzny odpowiednio yOz oraz xOz (ale nie są wykresami funkcji $z = f(x,y)$).



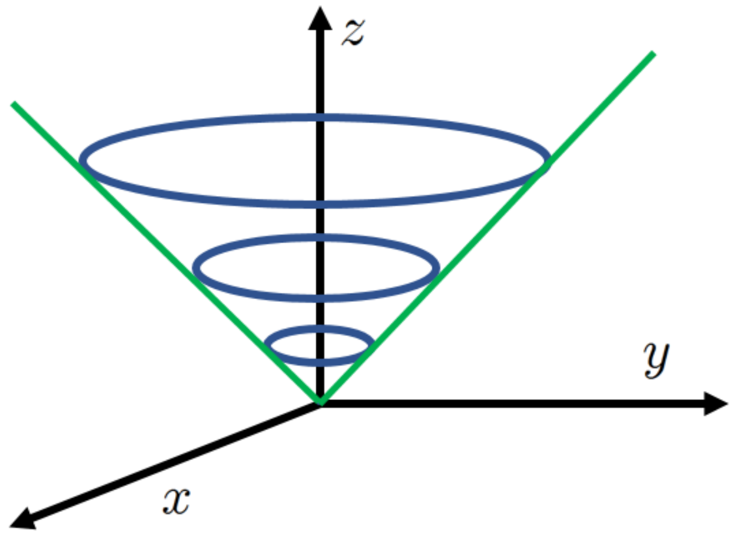
2. Równanie $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ opisuje tzw. paraboloidę obrotową.
Istotnie. Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbb{R}^2$ a zbiorem wartości jest zbiór $Z = [0, +\infty)$. Zbadajmy przecięcia wykresu funkcji f z płaszczyznami $z = C$. Dla $C < 0$ przecięcia są zbiorami pustymi. Dla $C = 0$ mamy $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 \iff (0, 0)$, czyli przecięciem jest punkt $(0, 0, 0)$. Dla $C = 1$ mamy $x^2 + y^2 = 1$, co geometrycznie przedstawia okrąg o promieniu 1 narysowany na "wysokości" $z = 1$ (tzn. środek okręgu jest w punkcie $(0, 0, 1)$. Dla $C = 2$ mamy $x^2 + y^2 = 2$, co geometrycznie przedstawia okrąg o promieniu $\sqrt{2}$ narysowany dla $z = 2$. Ogólnie przecięciami wykresu funkcji f z płaszczyznami $z = C > 0$ są okręgi o promieniach $\sqrt{C}$.



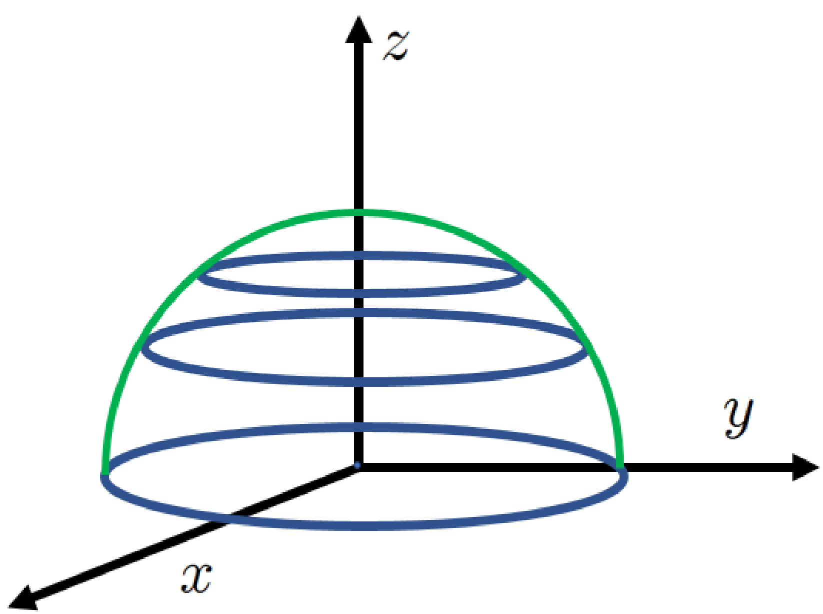
Dalej, zauważmy, że przecięciem wykresu funkcji f z płaszczyzną $x = 0$ jest parabola $z = y^2$. Czyli



3. Postępując analogicznie jak poprzednio, zauważmy, że wykresem funkcji $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest stożek (górny).

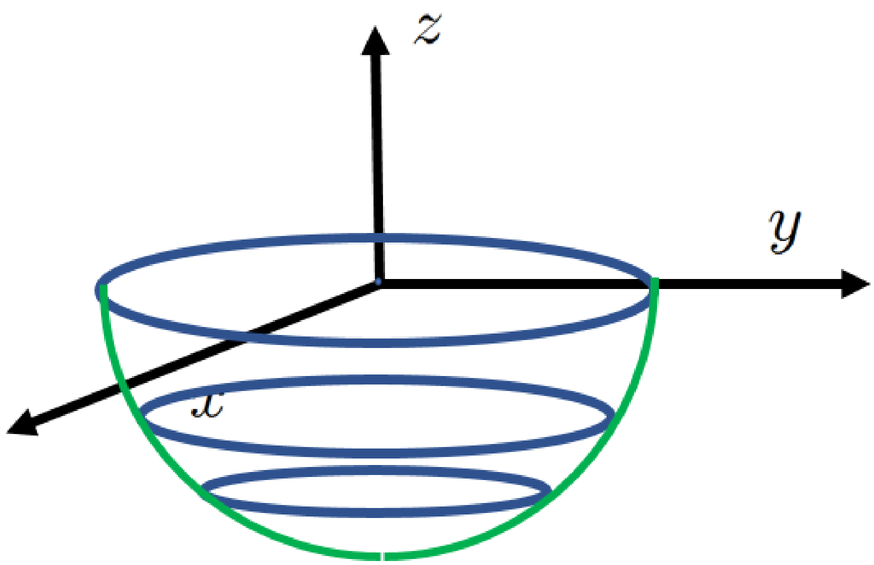


4. Rozważmy funkcję $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \{(x, y) : R^2 - x^2 - y^2 \geq 0\}$, czyli $x^2 + y^2 \leq R^2$, co geometrycznie przedstawia koło o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0, 0)$. Innymi słowy, tylko dla punktów (x, y) należących do tego koła istnieje wartość z. Zauważmy, że przecięciami wykresu funkcji f z płszczyznami $z = C$, gdzie $0 \leq C < R$, są okręgi a dla $C = R$ punkt. Dla pozostałych C przecięcia są zbiorami pustymi.
   Dalej, dla $x = 0$ otrzymujemy $z = \sqrt{R^2 - y^2}$, czyli górny półokrąg. Ostatecznie wykresem funkcji $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ jest (górna) półsfera o środku $(0, 0, 0)$ i promieniu R.

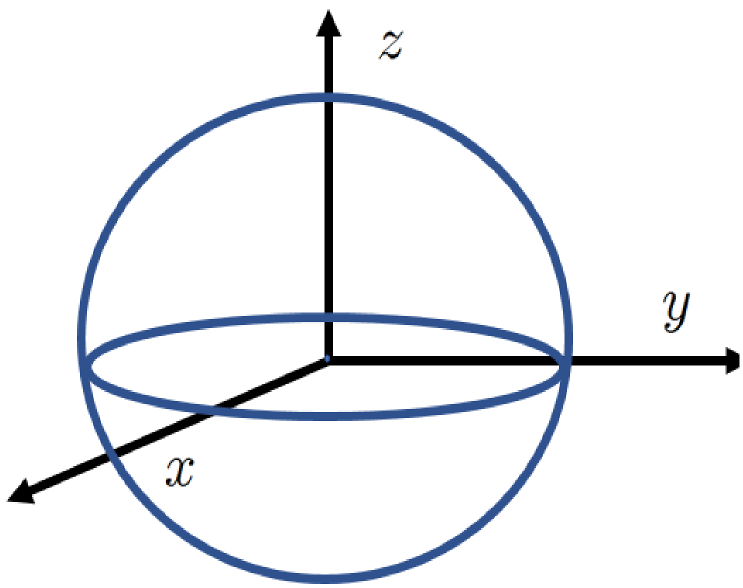


Oczywiście $z = f(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ przedstawia dolną półsferę o środku

$(0,0,0)$ i promieniu R.



4.1 Równaie $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$ nie jest wykresem funkcji, ale jest sklejeniem dwóch wykresów $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ oraz $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Czyli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ przedstawia sferę o promieniu R i środku w punkcie $(0,0,0)$.



Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, wprowadza się najważniejsze pojęcia z analizy matematycznej, czyli: pojęcie granicy funkcji, ciągłości funkcji, pochodnej (cząstkowej) funkcji, itd.

Uwaga 0.1 ***Dokładniej zajmiemy się jedynie pojęciem pochodnej cząstkowej i jej zastosowaniami.***

Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego

Załóżmy, że funkcja f o równaniu $z = f(x, y)$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0). Przez analogię do pochodnej funkcji jednej zmiennej wprowadźmy następującą definicję:

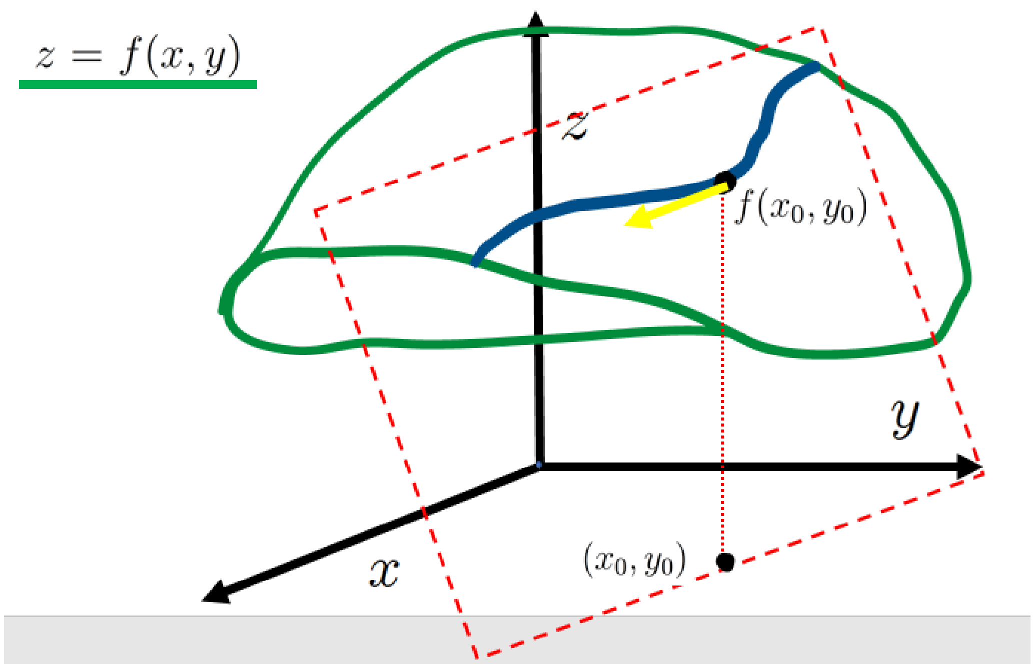
Definicja 0.1 *Pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji f w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej x nazywamy granicę właściwą postaci*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \text{ lub } f_x(x_0, y_0).$$

Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$:



Kolorem zielonym przedstwiony jest wykres funkcji $z = f(x, y)$. Przez punkt (x_0, y_0) prowadzimy płaszczyznę równoległa do płaszczyzny xOz (kolor czerwony - przerywany). Zauważmy, że częścią wspólną wykresu funkcji f oraz płaszczyzny jest wykres funkcji jednej zmiennej (niebieski). Tak więc (jak to miało miejsce w przypadku pochodnej funkcji jednej zmiennej), wartość pochodnej $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ jest współczynnikiem kierunkowym stycznej (kolor żółty) wystawionej w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Granicę właściwą postaci

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

nazywamy pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji f względem zmiennej y i oznaczamy

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \text{ lub } f_y(x_0, y_0).$$

Interpretacja geometryczna $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ *jest analogiczna jak* $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$.

Przykład 0.1 *Korzystając z definicji obliczyć pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji f względem zmiennej x oraz y w punkcie $(x_0, y_0) = (2, 1)$, gdzie*

$$f(x, y) = \frac{x}{x - y}.$$

Na początek obliczymy $\frac{\partial f(2,1)}{\partial x}$. *Mamy*

$$f(x_0, y_0) = f(2, 1) = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

oraz

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0) &= f(2 + \Delta x, 1) \overset{w\ miejsce\ x\ wstawiamy\ 2+\Delta x}{=} \\ &= \frac{2 + \Delta x}{2 + \Delta x - 1} = \frac{2 + \Delta x}{1 + \Delta x}. \end{aligned}$$

To

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} &= \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2 + \Delta x}{1 + \Delta x} - 2}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{1 + \Delta x}}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{(1 + \Delta x)\,\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{1 + \Delta x} = -1 \end{aligned}$$

Czyli $\frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = -1$.
Obliczymy $\frac{\partial f(2,1)}{\partial y}$. *Mamy*

$$f(x_0, y_0) = f(2, 1) = \frac{2}{2 - 1} = 2$$

oraz

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) = f(2, 1 + \Delta y) = \frac{2}{2 - (1 + \Delta y)} = \frac{2}{1 - \Delta y}.$$

To

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} &= \\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{2}{1 - \Delta y} - 2}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{1 - \Delta y}}{\Delta y} = \\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{(1 - \Delta y)\,\Delta y} &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{1 - \Delta y} = 1. \end{aligned}$$

Uwaga 0.2 *Jeżeli w każdym punkcie obszaru D określona jest pochodna cząstkowa funkcji f to mówimy, że w obszarze D określona jest funkcja zwana pochodną cząstkową tej funkcji.*

Oznaczenia

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ lub } \frac{\partial}{\partial x}(f) \text{ lub } f_x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ lub } \frac{\partial}{\partial x}(f) \text{ lub } f_y.$$

Łatwo zauważyć, że do obliczania pochodnych cząstkowych stosujemy te same wzory i własności jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, traktując zmienną po której pochodnej nie liczymy jako parametr (stałą).

Przykład 0.2 *Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$, gdzie $f(x,y) = 3x^2y - 5\sqrt{y}$.*
Obliczymy $\frac{\partial f}{\partial x}$ pamiętając, że funkcje zależne od zmiennej y traktujemy jako stałe (ponieważ liczymy pochodną po x,co sugeruje symbol ∂x w wyrażeniu $\frac{\partial f}{\partial x}$).
Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y - 5\sqrt{y}\right) \overset{\text{stosujemy wzór na pochodną różnicy}}{=} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(5\sqrt{y}\right) \overset{\text{wyłączamy stałe}}{=} \\
&= 3y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) - 5\sqrt{y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(1) \overset{\text{korzystamy ze znanych wzorów}}{=} \\
&= 3y \cdot 2x - 5\sqrt{y} \cdot 0 = 6xy.
\end{aligned}$$

Obliczymy $\frac{\partial f}{\partial y}$ pamiętając, że funkcje zależne od zmiennej x traktujemy jako stałe (ponieważ liczymy pochodną po y,co sugeruje symbol ∂y w wyrażeniu $\frac{\partial f}{\partial y}$).
Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y - 5\sqrt{y}\right) \overset{\text{stosujemy wzór na pochodną różnicy}}{=} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(5\sqrt{y}\right) \overset{\text{wyłączamy stałe}}{=} \\
&= 3x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(y) - 5 \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{y}\right) \overset{\text{korzystamy ze znanych wzorów}}{=} \\
&= 3x^2 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

Przykład 0.3 *Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$, gdzie $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$.*
Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x-y}\right) \overset{\text{stosujemy wzór na pochodną ilorazu}}{=} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot (x-y) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{1 \cdot (x-y) - x \cdot 1}{(x-y)^2} = \\
&= \frac{-y}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x-y}\right) \overset{\textit{stosujemy wzór na pochodną ilorazu}}{=} \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x)\cdot(x-y) - x\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x-y)}{(x-y)^2} = \frac{0\cdot(x-y)-x\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \\
&= \frac{x}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Uwaga: ostatnią pochodną można obliczyć inaczej. Mianowicie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x-y}\right) \overset{\textit{wyłączamy stałą}}{=} x\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-y}\right) = \\
&= x\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x-y)^{-1} \overset{\textit{stosujemy wzór na pochodną f-cji złożonej}}{=} \\
&= x\cdot(-1)\cdot(x-y)^{-2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = \\
&= x\cdot(-1)\cdot(x-y)^{-2}\cdot(-1) = \frac{x}{(x-y)^2}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{(x-y)^2}$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$, *to* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *liczona w punkcie* $(2,1)$ *wyniesie* $\frac{-1}{(2-1)^2} = -1$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *liczona w punkcie* $(2,1)$ *wyniesie* $\frac{1}{(2-1)^2} = 1$ *(patrz Przykład 0.1).*

Zadanie 0.1 *Obliczyć ze wzorów pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji* f *(czyli* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial y}$*), gdzie*

a) $f(x,y) = 3\sin x\cos y - \frac{2x}{3y^2}$. *Odp.:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\cos x\cos y - \frac{2}{3y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -3\sin x\sin y + \frac{4x}{3y^3}.$$

b) $f(x,y) = e^{2x-5\ln y}$. *Odp.:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x-5\ln y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{-5}{y}e^{2x-5\ln y}.$$

c) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{3x+4y}$ *Odp.:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2+8xy+3y^2}{(3x+4y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2\frac{3xy+2y^2+2x^2}{(3x+4y)^2}.$$