Podstawiając y oraz y' do równania (4) mamy

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \iff \\ u'(x)e^{-P(x)} - u(x)e^{-P(x)}p(x) + p(x)u(x)e^{-P(x)} &= q(x) \iff \\ u'(x)e^{-P(x)} &= q(x) \iff \\ u'(x) &= q(x)e^{P(x)} \iff \\ u(x) &= \int q(x)e^{P(x)}dx = Q(x) + c, \end{aligned}$$

gdzie $Q(x)$ jest dowolną, ustaloną funkcją, ponieważ $q(x)$ oraz $P(x) = \int p(x)dx$ są ustalonymi funkcjami.
Zatem funkcja $y = u(x)e^{-P(x)} = (Q(x) + c)\, e^{-P(x)}$ jest $CORNJ$ lub inaczej

$$y = u(x)e^{-P(x)} = (Q(x) + c)\, e^{-P(x)} = \underbrace{Q(x)e^{-P(x)}}_{CSRNJ} + \underbrace{ce^{-P(x)}}_{CORJ}$$

Przykład 0.7 *Rozwiązać równanie*

$$y' - y \operatorname{tg} x = \cos x.$$

1) *Rozwiązujemy równanie jednorodne (patrz wyżej)*

$$y' - y \operatorname{tg} x = 0 \iff y = \frac{c}{\cos x} - CORJ$$

2) *Uzmienniamy stałą, czyli $c = u(x)$. Otrzymujemy*

$$y = \frac{u(x)}{\cos x} - CORNJ \ (u(x) - ?)$$

3) *Szykamy funkcji $u(x)$*

$$y = \frac{u(x)}{\cos x} \Rightarrow y' = \left(\frac{u(x)}{\cos x}\right)' = \frac{u'(x)\cos x - u(x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

Podstawiamy y oraz y' do równania $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$. Mamy

$$\begin{aligned} \frac{u'(x)\cos x - u(x)(-\sin x)}{\cos^2 x} - \frac{u(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x &= \cos x \iff \\ \frac{u'(x)\cos x + u(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{u(x)\sin x}{\cos^2 x} &= \cos x \iff \\ \frac{u'(x)\cos x}{\cos^2 x} &= \cos x \iff \\ u'(x) &= \cos^2 x \Rightarrow \\ u(x) &= \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} y &= \frac{u(x)}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c}{\cos x} = \\ &= \underbrace{\frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x}{\cos x}}_{CSRNJ} + \underbrace{\frac{c}{\cos x}}_{CORJ}. \end{aligned}$$

Sprawdzenie: (uwaga: wystarczy sprawdzić czy $CSRNJ$ spełnia równanie) - zadanie domowe.