Przykład 0.5 *Rozwiązać równanie*

$$y' - y\text{tg}x = 0.$$

Zauważmy, że jest to równanie jednorodne, bo jest postaci $y' + p(x)y = 0$*, gdzie* $p(x) = -\mathbf{tg}x$*. Możemy je rozwiązać jako równanie o zmiennych rozdzielonych, lecz my skorzystamy z wyprowadzonego wzoru na* $CORJ$*. Zatem*

$$\begin{aligned} y &= ce^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int -\text{tg}x dx} = ce^{\int \text{tg}x dx} =, \\ &= ce^{-\ln|\cos x|} = \frac{c}{e^{\ln|\cos x|}} = \frac{c}{|\cos x|} \overset{\text{opuszczamy wartość bezwzględną pisząc } \pm}{=} \\ &= \frac{\pm c}{\cos x} \overset{\pm c = c}{=} \frac{c}{\cos x} - \text{ całka ogólna równania jednorodnego } (CORJ) \end{aligned}$$

Przykład 0.6 *Rozwiązać równanie* $y' - y\text{ctg}x = 0$*. Dodatkowo wyznaczyć całkę szczególną spełniającą warunek* $y(\frac{\pi}{2}) = 2$.
Zauważmy, że jest to równanie jednorodne, czyli

$$\begin{aligned} y &= ce^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int -\text{ctg}x dx} = ce^{\int \text{ctg}x dx} = \\ &= ce^{\ln|\sin x|} = c|\sin x| = \pm c \sin x = c \sin x. \end{aligned}$$

Zatem $y = c\sin x$*, gdzie* c *jest dowolną stałą.*
Uwzględniając warunek $y(\frac{\pi}{2}) = 2$ *mamy* ($y = 2$ *i* $x = \frac{\pi}{2}$)

$$2 = c \sin\frac{\pi}{2} \iff c = 2,$$

czyli $y = 2\sin x$ *- całka szczególna równania jednorodnego* ($CSRJ$).

Równania różniczkowe liniowe niejednorodne (RNJ)

Definicja 0.6 *Niech* $p(x)$ *oraz* $q(x)$ *będą funkcjami ciągłymi na przedziale* P*. Równanie*

$$y' + p(x)y = q(x), \text{ gdzie } q(x) \text{ nie jest funkcją stałą równą } 0, \qquad (4)$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym (RNJ).

Jedną z metod rozwiązywania RNJ jest tzw. metoda uzmienniania stałej. Wyporowadzimy ją w postaci ogólnej, ale do rozwiązywania zadań wykorzystamy tylko wnioski z tej metody.
Metoda uzmienniania stałej
Załóżmy, że funkcja $y = u(x)e^{-P(x)}$ jest całką ogólną równania (4). Pokażemy, że istnieje funkcja $u(x)$ taka, że funkcja

$$y = u(x)e^{-P(x)},$$

gdzie $P(x)$ jest dowolną, ustaloną funkcją pierwotną funkcji $p(x)$ będzie rozwiązaniem równania niejednorodnego. Mamy

$$\begin{aligned} y' &= \left(u(x)e^{-P(x)}\right)' = u'(x)e^{-P(x)} + u(x)e^{-P(x)} \cdot (-P(x))' = \\ &= u'(x)e^{-P(x)} + u(x)e^{-P(x)} \cdot (-p(x)) = \\ &= u'(x)e^{-P(x)} - u(x)e^{-P(x)}p(x). \end{aligned}$$