To

$$y'(x) = (u(x)x)' = u'(x)x + u(x),\ \textit{bo funkcja } u(x) \textit{ jest zależna od zmiennej } x.$$

lub krócej

$$y' = u'x + u.$$

Stosując podstawienie** $u = \frac{y}{x}$ **i** $y' = u'x + u$ **do wyjściowego równania sprowadzimy je do równania o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 0.4 *Rozwiązać równanie różniczkowe*

$$(*)\ x + yy' = 0.$$

$$x + yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}}.$$

Niech $u = \frac{y}{x}$, *to* $y = xu$ *oraz* $y' = xu' + u$. *Wówczas równaie* $(*)$ *jest równoważne równaniu*

$$\begin{aligned}
(**)\ x + xu(xu' + u) &= 0 \iff \\
\frac{u}{1+u^2}du &= -\frac{dx}{x} \iff \\
\int \frac{u}{1+u^2}du &= -\int \frac{dx}{x} \iff \\
\frac{1}{2}\ln|1+u^2| &= -\ln|x| + c \iff \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = -\ln|x| + \ln c_1 \iff \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln\frac{c_1}{|x|} \\
\ln\left(1+u^2\right) &= \ln\frac{c_1^2}{x^2} \iff 1 + u^2 = \frac{c_1^2}{x^2} \iff 1 + u^2 = \frac{c}{x^2} \iff 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x^2} \iff \\
x^2 + y^2 &= c - \textit{ całka ogólna równania } (*) \textit{ (w postaci uwikłanej)}
\end{aligned}$$

Równania różniczkowe liniowe jednorodne (RJ)

Definicja 0.5 *Niech* $p(x)$ *będzie funkcją ciągłą na przedziale* P. *Równanie*

$$y' + p(x)y = 0, \tag{3}$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.

Uwaga 0.3 *Zauważmy, że równanie to jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, czyli*

$$\begin{aligned}
y' + p(x)y &= 0 \iff y' = -p(x)y \iff \frac{dy}{dx} = -p(x)y \iff \\
\frac{dy}{y} &= -p(x)dx \iff \int\frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \iff \ln|y| = -\int p(x)dx = -P(x) + c \iff \\
|y| &= e^{-P(x)+c} \iff y = e^{-P(x)}e^{c} = e^{-P(x)}c_1.
\end{aligned}$$

Ostatecznie $(c_1 = c)$

$y = ce^{-\int p(x)dx}$ – ***wzór na całkę ogólną równania jednorodnego*** (3) $(CORJ)$.