Ostatecznie $(c = c_2)$

$$y = ce^x - \text{ całka ogólna równania } y' - y = 0.$$

Sprawdzenie

$$\begin{aligned} y &= ce^x \Rightarrow y' = ce^x \Rightarrow \\ y' - y &= ce^x - ce^x = 0. \end{aligned}$$

Omówimy teraz najprostsze równania różniczkowe.

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Definicja 0.3 *Równanie postaci*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}, \tag{1}$$

gdzie $g(y) \neq 0$ *jest funkcją ciągłą w przedziale* P_1 *oraz* $f(x)$ *jest funkcją ciągłą w przedzale* P_2, *nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.*

Uwaga 0.1

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}\Bigg| \cdot dx \cdot g(y) \iff g(y)dy = f(x)dx,$$

mówimy, iż zmienne rozdzieliły się. Czyli udało nam się doprowadzić do sytuacji, gdzie wszystkie funkcje zależne od y znalazły się po jednej stronie równania a wszystkie funkcje zależne od x znalazły się po drugiej stronie równania. Równaie to jest równoważne równaniu całkowemu

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Przykład 0.3

$$\begin{aligned} y' + 2x &= 0 \iff y' = -2x \iff \frac{dy}{dx} = -2x\Bigg| \cdot dx \iff dy = -2xdx \overset{\text{zmienne rozdzieliły się}}{\iff} \\ \int dy &= \int -2xdx \iff y = -x^2 + c. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe jednorodne wzgędem x **i** y

Definicja 0.4 *Niech* $f(u)$ *będzie funkcją określoną i ciągłą w przedziale* P, *ponadto* $f(u) \neq u$. *Równanie postaci*

$$y' = f(\frac{y}{x}), \tag{2}$$

nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym ze względu na x i y.

Uwaga 0.2 *W celu rozwiązania równania (2) stosujemy podatawienie* $u = \frac{y}{x}$, *a dokładnie*

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Wówczas

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}\Bigg| \cdot x \iff y(x) = u(x)x$$