

Wykład 3

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO

Definicja 0.1 Równanie postaci

$$F(x, y, y') = 0, \quad (0)$$

gdzie $y = y(x)$ jest funkcją zmiennej x określoną w przedziale P , nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego.

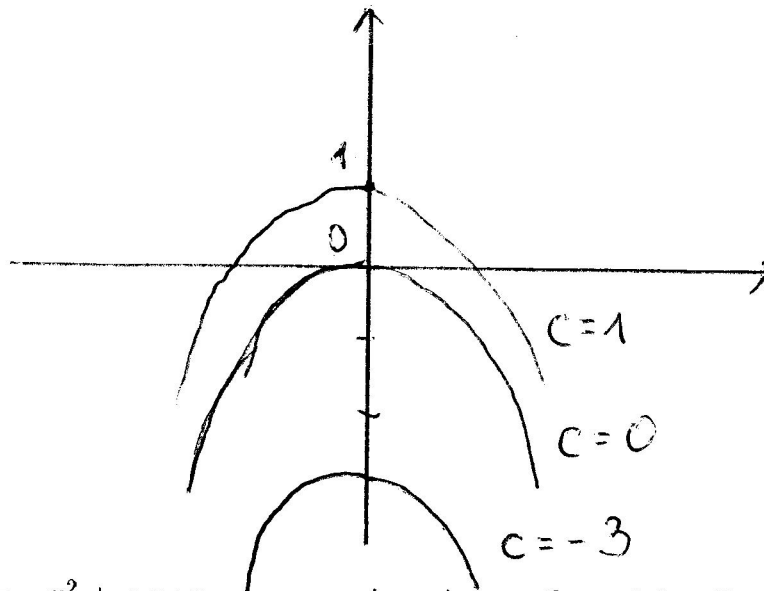
Przykład 0.1 Rozwiązać równanie

$$y' + 2x = 0, \text{ gdzie } y = y(x) \text{ niewiadoma.}$$

Wówczas

$$\begin{aligned} y' + 2x = 0 &\iff y' = -2x \iff \int y' dx = \int -2x dx \iff \\ y &= -x^2 + c - \text{równanie rodziny funkcji } (c = \text{const.}) \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna rodziny krzywych:



Wyrażenie $y = -x^2 + c$ nazywamy rozwiązaniem ogólnym lub całką ogólną równania różniczkowego (COR).

Definicja 0.2 Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną, (CO)) równania (0) nazywamy wszystkie funkcje spełniające to równanie - są one zależne od parametru c . Jedną z funkcji spełniającą równanie nazywamy rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną, (CS)). Powstaje ono najczęściej poprzez podstawienie do całki ogólnej jakiegoś parametru c .

Przykład 0.2 Rozwiązać równanie

$$y' - y = 0, \text{ gdzie } y = y(x).$$

$$\begin{aligned} y' - y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = 1 \iff \int \frac{y'}{y} dx = \int 1 dx \iff \ln |y| = x + c \iff \\ |y| &= e^{x+c} = e^x e^c = e^x c_1 \iff \\ y &= \pm e^x c_1 = e^x c_2 \end{aligned}$$