Obliczyć $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln x} dx$. *Zauważmy, że* $1 \notin D_f$. *Skorzystamy ze wzoru* (i). *Obliczymy całkę nieoznaczoną*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c.\end{aligned}$$

To

$$\begin{aligned}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x \ln x} dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln|\ln x|)|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\ln|\ln(1-\varepsilon)| - \ln\left|\ln \frac{1}{2}\right| \right) = -\infty,\end{aligned}$$

bo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln|\ln(1-\varepsilon)| \stackrel{[\ln \ln 1^+] = [\ln 0^+] = -\infty}{=} -\infty.$$

Wprowadzimy teraz inny rodzaj całek niewłaściwych, gdzie jednym z końców przedziału cłkowania jest ∞.

Definicja 0.2 *Niech funkcja* f *będzie ograniczona oraz całkowalna na przedziale* $[a, v]$, *dla każdego* $v > a$ *oraz istnieje granica*

$$\lim_{v \to +\infty} \int_a^v f(x)dx,$$

to nazywamy ją całką niewłaściwą funkcji f *na przedziale* $[a, +\infty]$ *i oznaczamy*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Analogicznie określamy symbol

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$$

Przez

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

rozumiemu sumę całek postaci

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)dx + \int_{A}^{+\infty} f(x)dx.$$