Wykład 2

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

Zauważmy, że w przypadku całek oznaczonych przedział całkowania zawierał się w dziedzinie funkcji podcałkowej. Rozszerzymy pojęcie całki oznaczonej na obszary całkowania takie, że jeden z końców przedziału całkowania nie należy do dziedziny funkcji podcałkowej, ewentualnie jednym z końców jest $\pm\infty$. Innymi słowy, przedział całkowania jest przedziałem jednostronnie otwartym lub jest przedziałem nieograniaczonym.

Definicja 0.1 *Niech funkcja f będzie ograniczona oraz całkowalna na przedziale (i) $[a, b-\varepsilon]$, (ii) $[a+\varepsilon, b]$, dla każdego $0 < \varepsilon < b-a$. Jeżeli istnieje granica*

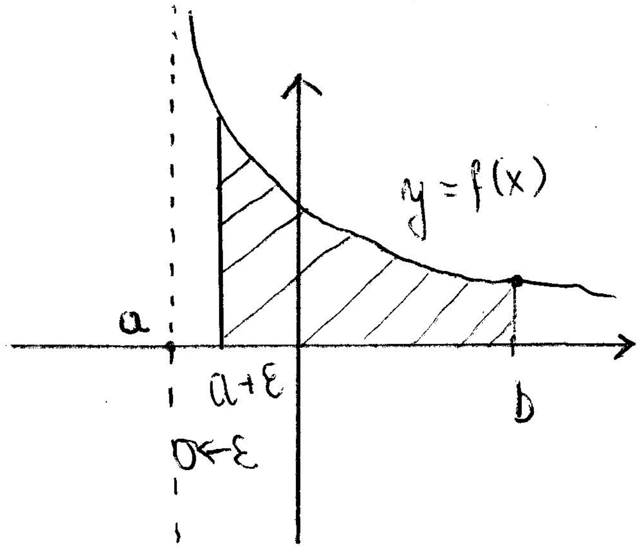
$$(i) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

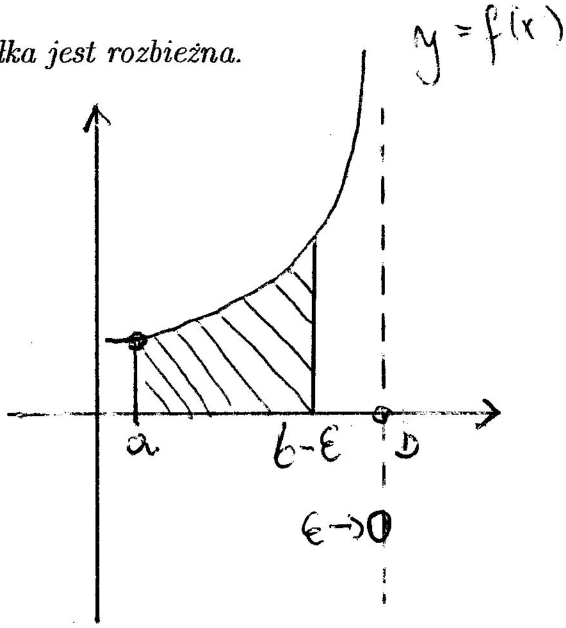
$$(ii) \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

to nazywamy ją całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Jeżeli nie istnieje granica (i), (ii), to mówimy, że całka jest rozbieżna.





Uwaga 0.1 *W punktach a, b funkcja f nie musi być określona.*

Przykład 0.1 *Obliczyć $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Zauważmy, że $0 \notin D_f$. Skorzystamy ze wzoru (ii). W tym celu obliczymy całkę nieoznaczoną*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

Dalej

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_\varepsilon^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.\end{aligned}$$