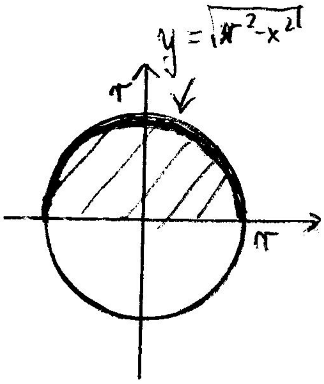
Przykład 1.3 *Wyprowadzić wzór na pole koła o promieniu r.*



Z równania okręgu $x^2+y^2=r^2$ wyznaczamy

$$y=\begin{cases}\sqrt{r^2-x^2}\\ -\sqrt{r^2-x^2}\end{cases}.$$

Do dalszych obliczeń bierzemy $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$.

To

$$|D|=2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=2\cdot\left(\frac{x}{2}\cdot\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{r}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

$$=2\cdot\left[\left(\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin 1\right)-\left(\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin(-1)\right)\right]=$$

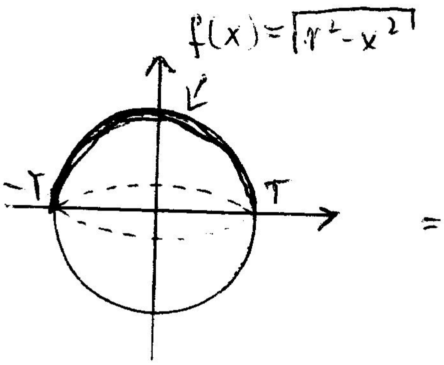
$$=2\cdot\left[\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{r^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\underline{\underline{\pi r^2}}.$$

Objetość bryły obrotowej

Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a,b]$. Wówczas objetość bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji f dookoła osi Ox przedstawia się wzorem

$$|V|=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Przykład 1.4 *Wyprowadzić wzór na objętość kuli o promieniu* ~~R~~ r.



$$|V|=\pi\cdot\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\cdot\int_{-r}^{r}r^2-x^2dx=$$

$$=\pi\cdot\left(r^2\cdot x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=\pi\cdot\left(\frac{2r^3}{3}+\frac{2r^3}{3}\right)=\underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej

Niech f będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale $[a,b]$. Wówczas pole powierzchni bocznej bryły powstałej w wyniku obrotu wykresu funkcji f dookoła osi Ox wyraża sie wzorem

$$|S|=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Przykład 1.5 *Wyprowadzić wzór pole powierzchni kuli o promieniu R.*