Twierdzenie 1.1 *Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a,b]$.

Przykład 1.1 *Obliczyć $\int_{-2}^{1} x^2 - 4dx$. Najpierw obliczamy całkę nieoznaczoną*

$$\int x^2 - 4dx = \frac{x^3}{3} - 4x + c.$$

To

$$\int_{-3}^{2} x^2 - 4dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} - 4\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 4\cdot(-2)\right) =$$
$$= -\frac{11}{3} - \frac{16}{3} = -9.$$

Zastosowania geometryczne całki oznaczonej
Pole obszaru płaskiego

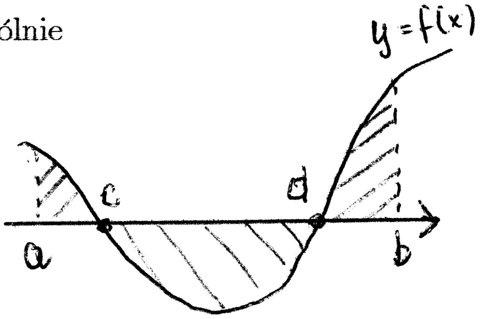
Przykład 1.2 *Obliczyć pole ograniczone wykresem funkcji $f(x) = \sin x$ oraz osią Ox na przedziale $[0,\pi]$.*
Rozw.: Zauważmy, że funkcja $f(x) = \sin x$ na przedziale $[0,\pi]$ jest nieujemna. To pole obszaru wynosi $\int_0^\pi \sin xdx$. W pierwszej kolejności wyznaczamy całkę nieoznaczoną. Wiadomo, że $\int \sin xdx = -\cos x + c$. Wówczas

$$\int_0^\pi \sin xdx = (-\cos x)|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2\ [j^2],$$

gdzie $[j^2]$ oznacza jednostki kwadratowe.

Uwaga 1.1 *Jeżeli funkcja f jest ujemna na $[a,b]$, to $|P| = -\int_a^b f(x)dx$.*

Ogólnie



$$|D| = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

Przykład 1.3 *Wyprowadzić wzór na pole koła o promieniu r.*