1. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie (wynik sprawdzić)

$$(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i=0.$$

Zauważmy, że $A=1+3i$, $B=16-12i$ oraz $C=-65-55i$. To

$$\begin{aligned}\Delta &= B^2-4AC=(16-12i)^2-4\,(1+3i)\,(-65-55i)=4^2(4-3i)^2+20(1+3i)(13+11i)=\\ &= 16(16-24i-9)+20(13+11i+39i-33)=16(7-24i)+20(-20+50i)=\\ &= 112-384i-400+1000i=-288+616i\end{aligned}$$

Wyznaczamy $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-288+616i}$, czyli szukamy liczb postaci $x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ takich, że $(x+yi)^2=-288+616i$. Z wykładu wiemy, że liczby x i y spełniają układ trzech równań

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=-288\\ 2xy=616\\ x^2+y^2=\sqrt{(-288)^2+(616)^2}=\sqrt{(288)^2+(616)^2}=680\end{array}\right..$$

Dodając stronami równania (1) oraz (3) otrzymamy:

$$\begin{aligned}x^2-y^2+x^2+y^2 &= -288+680 \iff\\ 2x^2 &= 392 \iff\\ x^2 &= 196 \iff\\ x &= 14\vee x=-14.\end{aligned}$$

Z równania (2) wiemy, że $y=\frac{308}{x}$. Czyli dla $x=14$, $y=22$ oraz dla $x=-14$, $y=-22$. Stąd

$$\sqrt{\Delta}=\{14+22i,-14-22i\}.$$

Dalej, niech $\sqrt{\Delta}:=14+22i$. Rozwiązania równania $(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i=0$ generujemy ze wzorów $z=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$ oraz $z=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$. Mamy

$$\begin{aligned}z &= \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-(16-12i)-(14+22i)}{2\,(1+3i)}=\frac{-16+12i-14-22i}{2\,(1+3i)}=\\ &= \frac{-30-10i}{2\,(1+3i)}=\frac{-30-10i}{2\,(1+3i)}=\frac{-15-5i}{1+3i}=\frac{-5(3+i)}{1+3i}=\frac{-5(3+i)\,(1-3i)}{(1+3i)\,(1-3i)}=\\ &= \frac{-5(6-8i)}{10}=-3+4i.\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}z &= \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{-(16-12i)+(14+22i)}{2\,(1+3i)}=\frac{-16+12i+14+22i}{2\,(1+3i)}=\\ &= \frac{-2+34i}{2\,(1+3i)}=\frac{-1+17i}{2\,(1+3i)}=\frac{(-1+17i)\,(1-3i)}{(1+3i)\,(1-3i)}=\frac{50+20i}{10}=5+2i.\end{aligned}$$

Ostatecznie, rozwiązaniami równania $(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i=0$ są liczby zespolone $z=-3+4i$ oraz $z=5+2i$.

Sprawdzenie:

Pierwszy sposób

*) Wykażemy, że dla $z=-3+4i$, $(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i=0$. Istotnie:

$$\begin{aligned}&(1+3i)\,(-3+4i)^2+(16-12i)\,(-3+4i)-65-55i=\\ &=(1+3i)\,(9-24i-16)+4\,(4-3i)\,(-3+4i)-65-55i=\\ &=(1+3i)\,(-7-24i)+4\,(-12+16i+9i+12)-65-55i=\\ &=-7-24i-21i+72+4(25i)-65-55i=\\ &=65-45i+100i-65-55i=0+0i=0.\end{aligned}$$

**) Wykażemy, że dla $z=5+2i$, $(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i=0$. Istotnie:

$$\begin{aligned}&(1+3i)\,(5+2i)^2+(16-12i)\,(5+2i)-65-55i=\\ &=(1+3i)\,(25+20i-4)+4\,(4-3i)\,(5+2i)-65-55i=\\ &=(1+3i)\,(21+20i)+4\,(20+8i-15i+6)-65-55i=\\ &=21+20i+63i-60+4(26-7i)-65-55i=\\ &=-39+83i+104-28i-65-55i=0+0i=0.\end{aligned}$$

Drugi sposób
Wykażemy, że wielomian $(1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i$ rozkłada sie na czynniki $(1+3i)\,[(z-(5+2i))(z-(-3+4i))]$.
Istotnie:

$$\begin{aligned}
&(1+3i)\,[(z-(5+2i))(z-(-3+4i))] = \\
&(1+3i)\left[z^2-z(-3+4i)-(5+2i)z+(5+2i)(-3+4i)\right] = \\
&= (1+3i)\left[z^2-z((5+2i)+(-3+4i))+(5+2i)(-3+4i)\right] = \\
&= (1+3i)\left[z^2-z(2+6i)-23+14i\right] = \\
&= (1+3i)\,z^2-z\,(1+3i)\,(2+6i)+(1+3i)\,(-23+14i) = \\
&= (1+3i)\,z^2+(16-12i)\,z-65-55i.
\end{aligned}$$

Uwaga: Drugi sposób sprawdzenia wykorzystać można do "wymyślania" zadań podobnych do zadania 1. Mianowicie w wyrażeniu $\alpha\,[(z-\beta)(z-\gamma)]$ w miejsce α,β,γ podstawimy liczby zespolone np. $(2+i)$, $(3-2i)$, $(4+3i)$. Mamy

$$\begin{aligned}
&\alpha\,[(z-\beta)(z-\gamma)] = (2+i)\,[(z-(3-2i))(z-(4+3i))] = \\
&(2+i)\left[z^2-z(3-2i)-(4+3i)z+(3-2i)(4+3i)\right] = \\
&= (2+i)\left[z^2-z((3-2i)+(4+3i))+(3-2i)(4+3i)\right] = \\
&= (2+i)\left[z^2-z(7+i)+18+i\right] = \\
&= (2+i)\,z^2-z\,(2+i)\,(7+i)+(2+i)\,(18+i) = \\
&= (2+i)\,z^2-(13+9i)\,z+35+20i.
\end{aligned}$$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie (wynik sprawdzić)

$$(2+i)\,z^2-(13+9i)\,z+35+20i=0.$$

(pozostawiamy jako zadanie do samodzielnego rozwiązania)

Niech $z_1 = |z_1| (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = |z_2| (\cos\beta + i\sin\beta)$ oraz $z = |z| (\cos\gamma + i\sin\gamma)$ będą liczbami zespolonymi w postaci trygonometrycznej. Wówczas

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \tag{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)), \; z_2 \neq 0. \tag{2}$$

$$z^n = z = |z|^n (\cos(n\gamma) + i\sin(n\gamma)) \text{ (wzór Moivre,a).} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \{w_0, w_1, ..., w_{n-1}\}, \text{ gdzie} \\ w_k &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\gamma+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\gamma+2k\pi}{n}\right), \; k = 0, 1, ..., n-1. \end{aligned} \tag{4}$$

1. Zamienić na postać trygonometryczną liczby:
a) $z = 3 = 3 + 0i$. Mamy $a = 3$, $b = 0$,

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+0^2} = \sqrt{9} = 3$$

(bo $|z|$ jest liczbą rzeczywistą nieujemną - patrz: interpretacja geometryczna liczby zespolonej) oraz argument α liczby z wyznaczamy z układu

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{3}{3} = 1 \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{0}{3} = 0 \end{cases} \iff \alpha = 0 + 2k\pi.$$

Przyjmujemy $\mathrm{Arg}(z) = 0$. Zatem

$$z = 3(\cos 0 + i\sin 0).$$

b) $z = -5i = 0 - 5i$. Mamy $a = 0$, $b = -5$,

$$|z| = \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25} = 5$$

oraz

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{cases} \iff \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

Przyjmujemy $\mathrm{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2}$ lub $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{2}$ (w zależności od przyjętej definicji argumentu głównego; w naszym wypadku nie ma to znaczenia). Zatem

$$z = -5i = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Uwaga: Pomimo, że $z = -5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, to ostatnia postać **nie jest** postacią trygonometryczną liczby $z = -5i$.
c) $z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$. Mamy $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$,

$$|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = 2\sqrt{2}$$

oraz

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Przyjmujemy $\mathrm{Arg}(z) = \frac{2\pi}{3}$. Zatem

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Obliczyć (wynik pozostawić w postaci algebraicznej)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{123}.$$

Zamieniamy liczbę $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ na postać trygonometryczną:

$$|z|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$$

oraz

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{1}{2}\end{cases}\iff \alpha=-\frac{\pi}{6}+2k\pi.$$

Przyjmujemy $\operatorname{Arg}(z)=-\dfrac{\pi}{6}$. Czyli

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Zatem ze wzoru Moivre'a (3) mamy

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i\right)^{123}&=\cos\left(-\frac{123\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{123\pi}{6}\right)=\cos\frac{10\cdot 12\pi+3\pi}{6}-i\sin\frac{10\cdot 12\pi+3\pi}{6}=\\&=\cos\left(10\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{6}\right)-i\sin\left(10\cdot 2\pi+\frac{3\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=0-i\cdot 1=-i.\end{aligned}$$

3. Obliczyć (wynik pozostawić w postaci algebraicznej)

$$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^{17}}{(-2+2i)^{22}}.$$

*) Zamieniamy liczbę $z=\sqrt{2}-\sqrt{6}i$ na postać trygonometryczną:

$$|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}=2\sqrt{2}$$

oraz

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\iff \alpha=-\frac{\pi}{3}+2k\pi.\text{ (patrz Lista 1 (?))}$$

Przyjmujemy $\operatorname{Arg}(z)=-\dfrac{\pi}{3}$. Czyli

$$z=\sqrt{2}-\sqrt{6}i=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

**) Zamieniamy liczbę $z=-2+2i$ na postać trygonometryczną:

$$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

oraz

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\iff \alpha=\frac{3\pi}{4}+2k\pi.$$

Przyjmujemy $\operatorname{Arg}(z)=\frac{3\pi}{4}$. Czyli $z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
Zatem

$$\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}i\right)^{17}}{(-2+2i)^{22}}=\frac{\left[2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{17}}{\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{22}}\overset{(3)}{=}$$

$$\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{17}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{3}\right)\right)}{\left(2\sqrt{2}\right)^{22}\left(\cos\frac{66\pi}{4}+i\sin\frac{66\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{22}}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{3}+\frac{33\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{3}+\frac{33\pi}{2}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{5}}\left(\cos\frac{65\pi}{6}+i\sin\frac{65\pi}{6}\right)=\left|\begin{array}{l}\cos\frac{65\pi}{6}=\cos\frac{5\cdot 12\pi+5\pi}{6}=\cos\left(5\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\frac{65\pi}{6}=\sin\frac{5\cdot 12\pi+5\pi}{6}=\sin\left(5\cdot 2\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\end{array}\right|=$$

$$\frac{1}{\left(2\sqrt{2}\right)^{5}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{2}\right)^{6}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{512}\left(-\sqrt{3}+i\right)=\frac{1}{512}\left(-\sqrt{6}+\sqrt{2}i\right).$$

4. Obliczyć pierwiastki 4-go stopnia z liczby $z = -16$ (wynik pozostawić w postaci algebraicznej).
Zamieniamy liczbę $z = -16$ na postać trygonometryczną. Z interpretacji geometrycznej liczby -16 wynika, że $|z| = 16$ oraz $\operatorname{Arg}(z) = \pi$.Stąd
$$z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$
Dalej
$$\sqrt[4]{-16} = \{w_0, w_1, w_2, w_3\},\ \text{gdzie (patrz wzór (4))}$$
$$w_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k = 0,1,2,3. \tag{5}$$
Ostatecznie (do powyższego wzoru podstawiamy kolejno $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ oraz $k = 3$)
$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$
$$w_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.$$
$$w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$
$$w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$
Czyli
$$\sqrt[4]{-16} = \{\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i\}.$$
Sprawdzenie: Ponieważ stopień pierwiastka nie jest zbyt duży posłużymy się postacią algebraiczną, tzn.
$$(w_0)^4 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^4 = \left[\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2\right]^2 = (4i)^2 = -16 = (-w_0)^4 = (w_2)^4.$$
$$(w_1)^4 = \left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^4 = \left[\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^2\right]^2 = (-4i)^2 = (4i)^2 - 16 = (-w_1)^4 = (w_3)^4.$$
Uwaga 1: Zauważmy, że pierwiastki 4-go stopnia z liczby $z = -16$ tworzą pary liczb przeciwnych, tzn. $w_0 = -w_2$ oraz $w_1 = -w_3$.
Uwaga 2: Ze wzoru (5) nie wygenerujemy "dodatkowych" pierwiastków. Istotnie, podstawiając np. $k = 4$ do wzoru (5) otrzymamy
$$w_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \overset{-2\pi}{=} 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = w_0.$$
Podstawiając $k = 5$ otrzymamy
$$w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right) \overset{-2\pi}{=} 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i = w_1.\ \text{Itd.}$$
Uwaga 3: Zbiór $\sqrt[4]{-16} = \{\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ -\sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i\}$ jest zbiorem wierzchołków kwadratu wpisanego w okrąg o promieniu 2.

5. Obliczyć pierwiastki 3-go stopnia z liczby $z = 1$ (wynik pozostawić w postaci algebraicznej).
Zamieniamy liczbę $z = 1$ na postać trygonometryczną. Z interpretacji geometrycznej liczby 1 wynika, że $|z| = 1$ oraz $\operatorname{Arg}(z) = 0$.Stąd
$$z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0).$$
Dalej
$$\sqrt[3]{1} = \{w_0, w_1, w_2\},\ \text{gdzie (patrz wzór (4))}$$
$$w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right) = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k = 0,1,2. \tag{6}$$
Ostatecznie (do powyższego wzoru podstawiamy kolejno $k = 0$, $k = 1$, oraz $k = 2$)
$$w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1.\ \text{(wynik oczywisty)}$$
$$w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$
$$w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Czyli

$$\sqrt[3]{1} = \{1, \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}.$$

Uwaga 1: Zauważmy, że pierwiastki 3-go stopnia z liczby $z = 1$ tworzą pary liczb sprzężonych, tzn. $w_0 = \overline{w_0}$ oraz $w_1 = \overline{w_2}$.

Uwaga 2: Ze wzoru (6) nie wygenerujemy "dodatkowych" pierwiastków. Istotnie, podstawiając np. $k = 3$ do wzoru (6) otrzymamy

$$w_3 = \cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 = w_0.$$

Podstawiając $k = 4$ otrzymamy

$$w_4 = \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} \overset{-2\pi}{=} \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w_1. \text{ Itd.}$$

Uwaga 3: Zbiór $\sqrt[3]{1} = \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ jest zbiorem wierzchołków trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu 1.