Wartości f-ji trygonometrycznych dla kątów z pierwszej ćwiartki

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$n.i.$
$\operatorname{ctg} x$	$n.i.$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(1)

Tabela znaków

	I	**II**	**III**	**IV**
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg} x$	$+$	$-$	$+$	$-$

(2)

Wzory redukcyjne.

Niech $\beta \in I$ ćwiartki. Wówczas

$$\sin(\blacksquare + \beta) = \begin{cases} \cos\beta, & \blacksquare = \frac{\pi}{2}, \\ -\sin\beta, & \blacksquare = \pi, \\ -\cos\beta, & \blacksquare = \frac{3\pi}{2}, \\ \sin\beta, & \blacksquare = 2\pi. \end{cases} \qquad \sin(\blacksquare - \beta) = \begin{cases} \cos\beta, & \blacksquare = \frac{\pi}{2}, \\ \sin\beta, & \blacksquare = \pi, \\ -\cos\beta, & \blacksquare = \frac{3\pi}{2}, \\ -\sin\beta, & \blacksquare = 2\pi. \end{cases} \tag{3}$$

$$\cos(\blacksquare + \beta) = \begin{cases} -\sin\beta, & \blacksquare = \frac{\pi}{2}, \\ -\cos\beta, & \blacksquare = \pi, \\ \sin\beta, & \blacksquare = \frac{3\pi}{2}, \\ \cos\beta, & \blacksquare = 2\pi. \end{cases} \qquad \cos(\blacksquare - \beta) = \begin{cases} \sin\beta, & \blacksquare = \frac{\pi}{2}, \\ -\cos\beta, & \blacksquare = \pi, \\ -\sin\beta, & \blacksquare = \frac{3\pi}{2}, \\ \cos\beta, & \blacksquare = 2\pi. \end{cases} \tag{4}$$

$$\sin x = \sin\varphi \iff x = \varphi + 2k\pi \vee x = (\pi - \varphi) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

$$\cos x = \cos\varphi \iff x = \varphi + 2k\pi \vee x = -\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

1. Obliczyć

$\circ) \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \overset{(3)}{=} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ lub
$\circ) \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \overset{(3)}{=} \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
$\circ) \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \overset{(4)}{=} -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ lub
$\circ) \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \overset{(4)}{=} -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
$\circ) \sin\frac{111\pi}{\mathbf{2}} = \sin\frac{\mathbf{4}\pi\cdot 27+3\pi}{2} = \sin\left(\mathbf{2}\pi\cdot 27 + \frac{3\pi}{2}\right) \overset{(3)}{=} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$.
$\circ) \sin\frac{308\pi}{\mathbf{3}} = \sin\frac{\mathbf{6}\pi\cdot 51+2\pi}{3} = \sin\left(\mathbf{2}\pi\cdot 51 + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} \overset{(3)}{=} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$\circ) \cos\frac{179\pi}{\mathbf{4}} = \cos\frac{\mathbf{8}\pi\cdot 22+3\pi}{4} = \cos\left(\mathbf{2}\pi\cdot 22 + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \overset{(4)}{=} -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\circ) \cos\frac{1379\pi}{\mathbf{6}} = \cos\frac{\mathbf{12}\pi\cdot 114+11\pi}{6} = \cos\left(\mathbf{2}\pi\cdot 114 + \frac{11\pi}{6}\right) \overset{(4)}{=} \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Rozwiązać równanie

$$\begin{aligned}
\circ)\ \sin x &= \frac{1}{2} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \overset{(5)}{\iff} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\
\circ)\ \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{(5)}{\iff} x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\
\circ)\ \sin x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \overset{(5)}{\iff} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\
\circ)\ \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \overset{(6)}{\iff} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\
\circ)\ \cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = -\cos\frac{\pi}{6} \overset{(4)}{\iff} \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \iff \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \overset{(6)}{\iff}\\
x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.\\
\circ)\ \cos x &= -\frac{1}{2} \iff \cos x = -\cos\frac{\pi}{3} \overset{(4)}{\iff} \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \overset{(6)}{\iff}\\
x &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

1. sposób (formalnie).
Rozwiążemy pierwsze równanie

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \overset{(6)}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Rozwiążemy drugie równanie

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{3} \overset{(5)}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Zatem, częścią wspólną równania pierwszego i drugiego jest zbiór

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2. sposób. Z tabeli znaków (2) wiemy, że α jest kątem z pierwszej ćwiartki, czyli korzystając z tabeli (1) mamy

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

1. sposób (formalnie).
Rozwiążemy pierwsze równanie

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{4} \overset{(4)}{\iff} \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \iff \cos x = \cos\frac{3\pi}{4} \overset{(6)}{\iff} \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Rozwiążemy drugie równanie

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{4} \overset{(5)}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem, częścią wspólną równania pierwszego i drugiego jest zbiór

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. sposób. Z tabeli znaków (2) wiemy, że α jest kątem z drugiej ćwiartki, czyli $\alpha = \pi - \beta$, gdzie kąt β wyznaczamy z układu pomocniczego

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Z tabeli (1) wiemy, że $\beta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Zatem

$$\alpha = \pi - \beta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

1. sposób (formalnie).
Rozwiążemy pierwsze równanie

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \iff \cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{3} \overset{(4)}{\iff} \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \overset{(6)}{\iff} \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Rozwiążemy drugie równanie

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\alpha = -\sin\frac{\pi}{3} \iff \sin\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \overset{(5)}{\iff} \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dodatkowo, zauważmy że $\alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \overset{+2\pi}{=} \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$. Zatem, częścią wspólną równania pierwszego i drugiego jest zbiór

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. sposób. Z tabeli znaków (2) wiemy, że α jest kątem z trzeciej ćwiartki, czyli $\alpha = \pi + \beta$, gdzie kąt β wyznaczamy z układu pomocniczego

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Z tabeli (1) wiemy, że $\beta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Zatem

$$\alpha = \pi + \beta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

1. sposób (formalnie).
Rozwiążemy pierwsze równanie

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \iff \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \overset{(6)}{\iff} \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Rozwiążemy drugie równanie

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin\alpha = -\sin\frac{\pi}{3} \iff \sin\alpha = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \overset{(5)}{\iff} \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem, częścią wspólną równania pierwszego i drugiego jest zbiór

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \overset{+2\pi}{=} \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

2. sposób. Z tabeli znaków (2) wiemy, że α jest kątem z czwarte ćwiartki, czyli $\alpha = 2\pi - \beta$, gdzie kąt β wyznaczamy z układu pomocniczego

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Z tabeli (1) wiemy, że $\beta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$. Zatem

$$\alpha = 2\pi - \beta = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$