

1 Wiadomości wstępne

- Narysować wykresy funkcji elementarnych: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x ($0 < a \neq 1$), $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$), $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} x$. Podać ich dziedziny i przeciwdziedziny.
- Rozłożyć na ułamki proste wyrażenie (wynik sprawdzić)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{8x+7}{x^2+3x-4}, & \text{b)} \frac{x+7}{x^2+5x+6}, & \text{c)} \frac{x+29}{x^2-2x-35}, \\ \text{d)} \frac{5x^2-3x+12}{(x-1)(x^2+x+5)}, & \text{e)} \frac{2x^2+5x+14}{(x+2)(x^2+2x+4)}, & \text{f)} \frac{3x^2-2x+7}{x^3+3x+4}. \end{array}$$

- Rozwiązać równania

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sin x = \sin \frac{\pi}{3}, & \text{b)} \cos x = \cos \frac{4\pi}{3}, & \text{c)} \cos x = \cos(-\frac{\pi}{4}), & \text{d)} \sin x = \sin \frac{7\pi}{6}, \\ \text{e)} \cos x = \frac{1}{2}, & \text{f)} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{g)} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{h)} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{i)} \sin x = 0, & \text{j)} \sin x = 1, & \text{k)} \sin x = -1, & \text{l)} \cos x = 0, \\ \text{m)} \cos x = 1, & \text{n)} \cos x = -1. & & \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & \text{b)} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & \text{c)} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ \text{d)} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, & \text{e)} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, & \text{f)} x = \frac{1}{4}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \\ \text{g)} x = -\frac{1}{3}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k, & \text{h)} x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, & \text{i)} x = \pi k, \\ \text{j)} x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{k)} x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{l)} x = \frac{1}{2}\pi + \pi k, \\ \text{m)} x = 2\pi k, & \text{n)} x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. & \end{array}$$

- Rozwiązać układy równań

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{b)} \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{c)} \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{d)} \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \\ \text{e)} \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, & \text{f)} \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}, & \text{g)} \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}, & \text{h)} \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \\ \text{i)} \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}, & \text{j)} \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}, & \text{k)} \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}, & \text{l)} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}. \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, & \text{b)} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & \text{c)} x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & \text{d)} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ \text{e)} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, & \text{f)} x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k, & \text{g)} \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, & \text{h)} x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ \text{i)} x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{j)} x = \pi + 2\pi k, & \text{k)} x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{l)} x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

- Rozwiązać równania i nierówności

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \log_3 x = \log_3 5, & \text{b)} \log_{\frac{1}{2}} 7 = \log_{\frac{1}{2}} x, & \text{c)} \log x > \log 10, & \text{d)} \log x \leq 1, & \text{e)} \ln x \geq 2, & \text{f)} 4 \geq \log_{\frac{1}{2}} x, \\ \text{g)} \log_{\frac{2}{3}} x \geq -1, & \text{h)} \ln(x-5) = 0, & \text{i)} \log(x+3) > -1, & \text{j)} \log_2(x^2-5) = 2, & \text{k)} \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2) > -3. \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} x = 5, & \text{b)} x = 7, & \text{c)} x > 10, & \text{d)} x \in [0, 10], & \text{e)} x \in [e^2, \infty), & \text{f)} x \in [\frac{1}{16}, \infty), & \text{g)} x \in (0, \frac{3}{2}], \\ \text{h)} x = 6, & \text{i)} x \in (-\frac{29}{10}, \infty), & \text{j)} x \in \{-3, 3\}, & \text{k)} x \in (-5, 5). \end{array}$$

2 Liczby zespolone

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, z_2 zachodzi

a) $z + \bar{z}$ jest liczbą rzeczywistą, b) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, c) $|\bar{z}| = |z|$, d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, f) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$,

2. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

a) $(3 + i)x - 2(1 + 4i)y = -2 - 4i$, b) $\frac{5x + 2xi - 3y - 3yi}{3 + 4i} = 2$ c) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$,
d) $(2 - i)x + (1 + 2i)y = 10i$, e) $\frac{7 + i}{3 + 4i} = \frac{x + yi}{4 - i}$.

Odp. a) $x = \frac{-4}{11}, y = \frac{5}{11}$, b) $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{28}{9}$, c) $x = \frac{-4}{11}, y = \frac{5}{11}$, d) $x = -2, y = 4$, e) $x = 3, y = -5$.

3. Rozwiązać równania (wynik zinterpretować na płaszczyźnie zespolonej)

a) $\bar{z} = -z$ b) $\bar{z} = z$ c) $z^2 + \bar{z} = 0$ d) $\bar{z} = 2 - z$

Odp. a) $iy, y \in \mathbb{R}$, b) $x, x \in \mathbb{R}$, c) $0, -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $1 + iy, y \in \mathbb{R}$

4. Obliczyć

a) $i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}$, b) $\frac{(1+i)^8 - 1}{(1-i)^8 + 1}$, c) $\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i} - \frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$,
d) $(2-3i)^2 - 4(3+i)(2+5i)$, e) $(-1+2i)^2 - 4(-2+3i)(4-i)$, f) $(-(3-2i))^2 + (2-i)^3$,
g) $\frac{26+7i}{3-4i}$, h) $\frac{-1+13i}{-2+i}$, i) $\frac{17+7i}{3+2i}$,
j) $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$, k) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Odp. a) $1, i, -1, -i$ b) $\frac{15}{17}$ c) $-\frac{48}{5}i$ d) $-9 - 80i$ e) $17 - 60i$ f) $7 - 23i$ g) $2 + 5i$ h) $3 - 5i$ i) $5 - i$
j) $\frac{22}{159} - \frac{5}{318}i$ k) 2

5. Obliczyć

a) $\sqrt{5+12i}$, b) $\sqrt{-7-24i}$, c) $\sqrt{24-10i}$,
d) $\sqrt{-48+14i}$, e) $\sqrt{-45-108i}$, f) $\sqrt{-21+20i}$,
g) $\sqrt{-7+24i}$, h) $\sqrt{4+3i}$, i) $\sqrt{8-15i}$.

a) $\{3+2i, -3-2i\}$, b) $\{-3+4i, 3-4i\}$, c) $\{5-i, -5+i\}$,
Odp. d) $\{1+7i, -1-7i\}$, e) $\{-6+9i, 6-9i\}$, f) $\{2+5i, -2-5i\}$,
g) $\{3+4i, -3-4i\}$, h) $\pm(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2})$, i) $\pm(\frac{5}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2}i\sqrt{2})$.

Dodatkowo, wyprowadzić układ (trzech) równań pomocny w rozwiązywaniu powyższego zadania.

6. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania (wynik sprawdzić)

a) $z^2 + 4z + 5 = 0$, b) $z^2 - 4iz - 3 = 0$, c) $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$,
d) $z^2 - (3-2i)z + 5 - 5i = 0$, e) $z^4 - 12z^2 + 64 = 0$, f) $9z^4 + 5z^2 + 1 = 0$,
g) $z^2 + (6+i)z + 5 + 5i = 0$, h) $z^2 - (5+5i)z + 2 + 11i = 0$,
i) $(1+2i)z^2 - (1+12i)z - 5 + 25i = 0$, j) $(2-i)z^2 + (3+i)z + 31 + 12i = 0$,
k) $(1-3i)z^2 + (7+19i)z - 28 - 46i = 0$, l) $(3+2i)z^2 + (1+5i)z - 52 + 13i = 0$.

Dodatkowo, obliczyć moduły z wyników.

Odp.

a) $z = -2 + i, z = -2 - i$ b) $z = 3i, z = i$, c) $z = 3 - i, z = -1 + 2i$,
d) $z = 2 + i, z = 1 - 3i$, e) $z = \pm(\sqrt{7} + i), z = \pm(\sqrt{7} - i)$, f) $z = \pm(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i\sqrt{11}), z = \pm(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i\sqrt{11})$,
g) $z = -1 - i, z = -5$, h) $z = 3 + 4i, z = 2 + i$, i) $z = 3 - i, z = 2 + 3i$,
j) $z = 1 - 4i, z = -2 + 3i$, k) $z = 3 + i, z = 2 - 5i$, l) $z = 3 - 2i, z = -4 + i$.

7. Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby

a) $\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$, b) $-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, c) $\cos \varphi - i \sin \varphi$, d) $-\cos \varphi - i \sin \varphi$, e) $\sin \varphi + i \cos \varphi$, f) $\sin \varphi - i \cos \varphi$,
g) $-\sin \varphi - i \cos \varphi$, h) -3 , i) $1 - i\sqrt{3}$, j) $-1 - \sqrt{3}$, k) $-1 - i$, l) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$,
m) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, n) $1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$, o) $1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$.

Odp.

a) $\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})$, b) $\cos(\frac{2}{3}\pi) + i \sin(\frac{2}{3}\pi)$, c) $\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$, d) $\cos(\pi + \varphi) + i \sin(\pi + \varphi)$,
e) $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, f) $\cos \varphi + i \sin \varphi$, g) $\cos(\frac{3\pi}{2} - \varphi) + i \sin(\frac{3\pi}{2} - \varphi)$, h) $3(\cos \pi + i \sin \pi)$,
i) $2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$, j) $2(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3}))$, k) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$, l) $\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$,
m) $\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$, n) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$, o) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

8. Obliczyć

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 & \text{b) } \left(\frac{4}{\sqrt{3} + i}\right)^{12}, & \text{c) } \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}, & \text{d) } (1 - i)^{25}, \\
\text{e) } \frac{(1 + i\sqrt{3})^6}{(1 + i)^8} & \text{f) } \left(\frac{-1 + 5i}{2 + 3i}\right)^6 & \text{g) } \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-i + \sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}, & \text{h) } (-1 + i)^{17} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{21}, \\
\text{i) } \frac{(1 - i)^{14}}{(-1 + \sqrt{3}i)^{19}}, & \text{j) } \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^{30}}{(-1 + i)^{26}}, & \text{k) } \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)^{100}, & \text{l) } \frac{(1 + i\sqrt{3})^{3n}}{(1 + i)^{4n}}.
\end{array}$$

Odp.

$$\begin{array}{llllll}
\text{a) } 1, & \text{b) } 4096, & \text{c) } 1, & \text{d) } 4096 - 4096i, & \text{e) } 4, & \text{f) } -8i, \\
\text{g) } -32 + 32i, & \text{h) } -256 - 256i, & \text{i) } \frac{1}{8192}(\sqrt{3} - i), & \text{j) } -4294\,967\,296i, & \text{k) } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{l) } 2^n.
\end{array}$$

9. Obliczyć

$$\text{a) } \sqrt[3]{1}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{-1}, \quad \text{c) } \sqrt[3]{-1 + i}, \quad \text{d) } \sqrt[3]{-\sqrt{3} + i}, \quad \text{e) } \sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}}, \quad \text{f) } \sqrt{-8i},$$

$$\text{Odp. a) } z = 1, z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{b) } z = -1, z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

10. Określić zbiór punktów spełniających

$$\begin{array}{llll}
\text{a) } |z - 1| \leq 3, & \text{b) } |z + 2i| = 3, & \text{c) } |z - 2 - 2i| = 2, & \text{d) } |z - 1| = |z + 2i|, \\
\text{e) } \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}, \quad |1 - 2i - z| < 2, & \text{f) } |z - i| = |z + i| = |z - 2|.
\end{array}$$

3 Macierze

1. Obliczyć iloczyn $ABCD$ macierzy, jeżeli:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad B = [213 \quad 510 \quad 128], \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D = [1 \quad -2 \quad 1] \quad \text{Odp.} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Obliczyć (jeśli istnieje) iloczyn ABC oraz BAC macierzy, jeżeli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} 54 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} 120 & 81 & 42 \\ -30 & -29 & -28 \\ 60 & 65 & 70 \end{bmatrix}$$

3. Obliczyć

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3, \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^4$$

$$\text{Odp. a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ b) } \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ c) } \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ -8 & 12 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 32 & 16 \\ 0 & -10 & -34 & -18 \end{bmatrix}$$

4. Znaleźć $f(A)$, jeżeli

$$\text{a) } f(X) = X^2 - 5X - 3I, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } f(X) = X^2 - X - I, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Wykazać, że każda macierz stopnia 2 postaci $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spełnia równanie $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I = 0$.

6. Rozwiązać równanie

$$\text{a) } 3 \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1] \cdot [0 \quad -1 \quad 2]^T$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{d) } \begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 Wyznaczniki

1. Obliczyć wyznaczniki rozwijając je względem wskazanych wierszy lub kolumn (w zadaniach od f) do k), w dalszych obliczeniach, można zastosować metody Sarrusa)

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\text{f) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{h) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{i) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{j) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\text{k) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Odp.: a) -22 , b), c) 2 , d), e) -17 , f),g),h) 18 , i), j) -32 , k) 312 .

2. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3-2i & -2+i \\ -2-i & 3+2i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4-3i & 2+3i \\ -2-i & i \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+i & 4-i & i \\ 2+i & 4-3i & 3-i \\ i & 2-2i & 1-i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1-i & 3-2i & 2+i \\ -i & 4-3i & 3 \\ 4+3i & 1-2i & 1-3i \end{bmatrix}.$$

Odp.: $\det A = 8$, $\det B = 4 + 12i$, $\det C = -2 + 19i$, $\det D = -5 - 30i$.

3. Rozwiązać równania i nierówności

$$\text{a) } \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{bmatrix} = 0, \quad \text{b) } \det \begin{bmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} x+3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 2 & x+3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} > 0, \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Odp.:

a) $x = -2, x = 1$, b) $x = 0, x = -2$, c) $x = 0, x = -8$, d) $x \in (-8, 0)$, e) $x \in (-6, -4)$.

4. Stosując operacje na wyznacznikach obliczyć

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 13 & 19 \end{vmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odp.: a) 18 , b) 48 , c) 0 , d) 1060 , e) -4 ,
 f) 12 , g) 12 , h) -512 .

5. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Odp. : } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Rozwiązać równania macierzowe

$$\text{a) } X \cdot A = B, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } 2YA = B + YC, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Odp. a) } X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ b) } Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \text{ c) } X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Wartości własne macierzy

1. Jądnym z pierwiastków charakterystycznych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & a \\ -2 & a & 6 \end{bmatrix}$$

jest liczba 3. Wyznaczyć wartości parametru a oraz pozostałe pierwiastki. Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A .

$$\text{Odp. } a = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

characteristic polynomial: $(X^3 - 18X^2 + 99X - 162)$,

eigenvalues: 6, 3, 9,

$$\text{eigenvectors: } \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 6, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 9,$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162} \begin{bmatrix} 38 & -4 & 14 \\ -4 & 26 & -10 \\ 14 & -10 & 35 \end{bmatrix}$$

$$a = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

characteristic polynomial: $X^3 - 18X^2 + 99X - 162$,

eigenvalues: 6, 3, 9,

$$\text{eigenvectors: } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 9, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 6,$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162} \begin{bmatrix} 38 & 4 & 14 \\ 4 & 26 & 10 \\ 14 & 10 & 35 \end{bmatrix}$$

2. Jądnym z pierwiastków charakterystycznych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest liczba 3. Wyznaczyć wartości parametru a oraz pozostałe pierwiastki. Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A .

Odp.

$$a = 7 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

characteristic polynomial: $(X^3 - 18X^2 + 99X - 162)$,

eigenvalues: 6, 3, 9,

eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 9, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 6,$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162} \begin{bmatrix} 35 & 14 & -10 \\ 14 & 38 & -4 \\ -10 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A .

Odp.

characteristic polynomial: $(X - 3)(X^2 - 12X + 11)$,

eigenvalues: 3, 11, 1,

eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 11, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 12 \\ 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A .

Odp.

characteristic polynomial: $X^3 - 14X^2 + 55X - 42$,

eigenvalues: 1, 6, 7,

eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 7, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 6,$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 36 & 12 & -6 \\ 12 & 11 & -2 \\ -6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

5. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Czy istnieje macierz odwrotna do A ?

Odp.

characteristic polynomial: $X^3 - 9X^2 + 18X$,

eigenvalues: 0, 6, 3,

eigenvectors: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 0, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 3, \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \leftrightarrow 6,$