1 Wiadomości wstępne

1. Narysować wykresy funkcji elementarnych: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(0 < a \neq 1)$, $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Podać ich dziedziny i przeciwdziedziny.

2. Rozłożyć na ułamki proste wyrażenie (wynik sprawdzić)

$$\text{a) } \frac{8x+7}{x^2+3x-4}, \quad \text{b) } \frac{x+7}{x^2+5x+6}, \quad \text{c) } \frac{x+29}{x^2-2x-35},$$
$$\text{d) } \frac{5x^2-3x+12}{(x-1)(x^2+x+5)}, \quad \text{e) } \frac{2x^2+5x+14}{(x+2)(x^2+2x+4)}, \quad \text{f) } \frac{3x^2-2x+7}{x^3+3x+4}.$$

3. Rozwiązać równania

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \sin x = \sin\frac{\pi}{3}, & \text{b) } \cos x = \cos\frac{4\pi}{3}, & \text{c) } \cos x = \cos(-\frac{\pi}{4}), & \text{d) } \sin x = \sin\frac{7\pi}{6}, \\ \text{e) } \cos x = \frac{1}{2}, & \text{f) } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{g) } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{h) } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \text{i) } \sin x = 0, & \text{j) } \sin x = 1, & \text{k) } \sin x = -1, & \text{l) } \cos x = 0, \\ \text{m) } \cos x = 1, & \text{n) } \cos x = -1. & & \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & \text{b) } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & \text{c) } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \\ \text{d) } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, & \text{e) } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, & \text{f) } x = \frac{1}{4}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \\ \text{g) } x = -\frac{1}{3}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{4}{3}\pi + 2\pi k, & \text{h) } x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, & \text{i) } x = \pi k, \\ \text{j) } x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{k) } x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{l) } x = \frac{1}{2}\pi + \pi k, \\ \text{m) } x = 2\pi k, & \text{n) } x = \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. & \end{array}$$

4. Rozwiązać układy równań

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{b) } \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{c) } \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, & \text{d) } \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \\ \text{e) } \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, & \text{f) } \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}, & \text{g) } \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}, & \text{h) } \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \\ \text{i) } \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}, & \text{j) } \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}, & \text{k) } \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}, & \text{l) } \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases}. \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, & \text{b) } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, & \text{c) } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, & \text{d) } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ \text{e) } x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, & \text{f) } x = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k, & \text{g) } \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, & \text{h) } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \\ \text{i) } x = \frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{j) } x = \pi + 2\pi k, & \text{k) } x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k, & \text{l) } x = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

5. Rozwiązac równania i nierówności

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \log_3 x = \log_3 5, & \text{b) } \log_{\frac{1}{2}} 7 = \log_{\frac{1}{2}} x, & \text{c) } \log x > \log 10, & \text{d) } \log x \leq 1, & \text{e) } \ln x \geq 2, & \text{f) } 4 \geq \log_{\frac{1}{2}} x, \\ \text{g) } \log_{\frac{2}{3}} x \geq -1, & \text{h) } \ln(x-5) = 0, & \text{i) } \log(x+3) > -1, & \text{j) } \log_2(x^2-5) = 2, & \text{k) } \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2) > -3. & \end{array}$$

Odp.:

$$\begin{array}{lllllll} \text{a) } x = 5, & \text{b) } x = 7, & \text{c) } x > 10, & \text{d) } x \in [0, 10], & \text{e) } x \in \left[e^2, \infty\right), & \text{f) } x \in \left[\frac{1}{16}, \infty\right), & \text{g) } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right], \\ \text{h) } x = 6, & \text{i) } x \in \left(-\frac{29}{10}, \infty\right), & \text{j) } x \in \{-3, 3\}, & \text{k) } x \in (-5, 5). & & & \end{array}$$

2 Liczby zespolone

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb zespolonych z, z_1, z_2 zachodzi

   a) $z+\overline{z}$ jest liczbą rzeczywistą, b) $z\cdot\overline{z}=|z|^2$, c) $|\overline{z}|=|z|$, d) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, e) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, f) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$,

2. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

   a) $(3+i)x-2(1+4i)y=-2-4i$, b) $\frac{5x+2xi-3y-3yi}{3+4i}=2$ c) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$,

   d) $(2-i)x+(1+2i)y=10i$, e) $\frac{7+i}{3+4i}=\frac{x+yi}{4-i}$.

   Odp. a) $x=\frac{-4}{11}, y=\frac{5}{11}$, b) $x=-\frac{2}{3}, y=-\frac{28}{9}$, c) $x=\frac{-4}{11}, y=\frac{5}{11}$, d) $x=-2, y=4$, e) $x=3, y=-5$.

3. Rozwiązać równania (wynik zinterpretować na płaszczyźnie zespolonej)

   a) $\overline{z}=-z$ b) $\overline{z}=z$ c) $z^2+\overline{z}=0$ d) $\overline{z}=2-z$

   Odp. a) $iy, y\in\mathbb{R}$, b) $x, x\in\mathbb{R}$, c) $0, -1, \frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $1+iy, y\in\mathbb{R}$

4. Obliczyć

   a) $i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}$, b) $\frac{(1+i)^8-1}{(1-i)^8+1}$, c) $\frac{(3-4i)(2-i)}{2+i}-\frac{(3+4i)(2+i)}{2-i}$,

   d) $(2-3i)^2-4(3+i)(2+5i)$, e) $(-1+2i)^2-4(-2+3i)(4-i)$, f) $(-(3-2i))^2+(2-i)^3$,

   g) $\frac{26+7i}{3-4i}$, h) $\frac{-1+13i}{-2+i}$, i) $\frac{17+7i}{3+2i}$,

   j) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$, k) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

   Odp. a) $1, i, -1, -i$ b) $\frac{15}{17}$ c) $-\frac{48}{5}i$ d) $-9-80i$ e) $17-60i$ f) $7-23i$ g) $2+5i$ h) $3-5i$ i) $5-i$ j) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$ k) 2

5. Obliczyć

   a) $\sqrt{5+12i}$, b) $\sqrt{-7-24i}$, c) $\sqrt{24-10i}$,

   d) $\sqrt{-48+14i}$, e) $\sqrt{-45-108i}$, f) $\sqrt{-21+20i}$,

   g) $\sqrt{-7+24i}$, h) $\sqrt{4+3i}$, i) $\sqrt{8-15i}$.

   Odp. a) $\{3+2i,\ -3-2i\}$, b) $\{-3+4i,\ 3-4i\}$, c) $\{5-i,\ -5+i\}$,
   d) $\{1+7i,\ -1-7i\}$, e) $\{-6+9i,\ 6-9i\}$, f) $\{2+5i,\ -2-5i\}$,
   g) $\{3+4i, -3-4i\}$, h) $\pm\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{2}\right)$, i) $\pm\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}i\sqrt{2}\right)$.

   Dodatkowo, wyprowadzić układ (trzech) równań pomocny w rozwiązywaniu powyższego zadania.

6. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania (wynik sprawdzić)

   a) $z^2+4z+5=0$, b) $z^2-4iz-3=0$, c) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$,

   d) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$, e) $z^4-12z^2+64=0$, f) $9z^4+5z^2+1=0$,

   g) $z^2+(6+i)z+5+5i=0$, h) $z^2-(5+5i)z+2+11i=0$,

   i) $(1+2i)z^2-(1+12i)z-5+25i=0$, j) $(2-i)z^2+(3+i)z+31+12i=0$,

   k) $(1-3i)z^2+(7+19i)z-28-46i=0$, l) $(3+2i)z^2+(1+5i)z-52+13i=0$.

   Dodatkowo, obliczyć moduły z wyników.

   Odp.

   a) $z=-2+i, z=-2-i$ b) $z=3i, z=i$, c) $z=3-i, z=-1+2i$,

   d) $z=2+i, z=1-3i$, e) $z=\pm(\sqrt{7}+i), z=\pm(\sqrt{7}-i)$, f) $z=\pm\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}i\sqrt{11}\right), z=\pm\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i\sqrt{11}\right)$,

   g) $z=-1-i, z=-5$, h) $z=3+4i, z=2+i$, i) $z=3-i, z=2+3i$,

   j) $z=1-4i, z=-2+3i$, k) $z=3+i, z=2-5i$, l) $z=3-2i, z=-4+i$.

7. Zapisać w postaci trygonometrycznej liczby

   a) $\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$, b) $-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$, c) $\cos\varphi-i\sin\varphi$, d) $-\cos\varphi-i\sin\varphi$, e) $\sin\varphi+i\cos\varphi$, f) $\sin\varphi-i\cos\varphi$,

   g) $-\sin\varphi-i\cos\varphi$, h) -3, i) $1-i\sqrt{3}$, j) $-1-\sqrt{3}$, k) $-1-i$, l) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

   m) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, n) $1-\frac{i}{\sqrt{3}}$, o) $1+\frac{i}{\sqrt{3}}$.

   Odp.

   a) $\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})$, b) $\cos(\frac{2}{3}\pi)+i\sin(\frac{2}{3}\pi)$, c) $\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$, d) $\cos(\pi+\varphi)+i\sin(\pi+\varphi)$,

   e) $\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)$, f) $\cos\varphi+i\sin\varphi$, g) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi)+i\sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi)$, h) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$,

   i) $2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$, j) $2(\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$, k) $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4})+i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$, l) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$,

   m) $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$, n) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}))$, o) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.

8. Obliczyć

a) $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ b) $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$, c) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$, d) $(1-i)^{25}$,

e) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^6}{(1+i)^8}$ f) $\left(\dfrac{-1+5i}{2+3i}\right)^6$ g) $\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-i+\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$, h) $(-1+i)^{17}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)^{21}$,

i) $\dfrac{(1-i)^{14}}{(-1+\sqrt{3}i)^{19}}$, j) $\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}i\right)^{30}}{(-1+i)^{26}}$, k) $\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}$, l) $\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3n}}{(1+i)^{4n}}$.

Odp.

a) 1, b) 4096, c) 1, d) $4096-4096i$, e) 4, f) $-8i$,

g) $-32+32i$, h) $-256-256i$, i) $\frac{1}{8192}\left(\sqrt{3}-i\right)$, j) $-4294\,967\,296i$, k) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, l) 2^n.

9. Obliczyć

a) $\sqrt[3]{1}$, b) $\sqrt[3]{-1}$, c) $\sqrt[3]{-1+i}$, d) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$, e) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$, f) $\sqrt{-8i}$,

Odp. a) $z=1, z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}, z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$ b) $z=-1, z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}, z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$

10. Określić zbiór punktów spełniających

a) $|z-1|\le 3$, b) $|z+2i|=3$, c) $|z-2-2i|=2$, d) $|z-1|=|z+2i|$,

e) $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$, $|1-2i-z|<2$, f) $|z-i|=|z+i|=|z-2|$.

3 Macierze

1. Obliczyć iloczyn $ABCD$ macierzy, jeżeli:

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 213 & 510 & 128 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Odp.} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ 5 & -10 & 5 \\ 7 & -14 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Obliczyć (jeśli istnieje) iloczyn ABC oraz BAC macierzy, jeżeli:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ Odp. : $\begin{bmatrix} 54 \\ 49 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ Odp. : $\begin{bmatrix} 120 & 81 & 42 \\ -30 & -29 & -28 \\ 60 & 65 & 70 \end{bmatrix}$

3. Obliczyć

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^4$$

Odp. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ -8 & 12 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 32 & 16 \\ 0 & -10 & -34 & -18 \end{bmatrix}$

4. Znaleźć $f(A)$, jeżeli

a) $f(X) = X^2 - 5X - 3I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ Odp. : $\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$

b) $f(X) = X^2 - X - I$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ Odp. : $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

5. Wykazać, że każda macierz stopnia 2 postaci $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ spełnia równanie $X^2 - (a+d)X + (ad - bc)I = 0$.

6. Rozwiązać równanie

a) $3 \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} X + 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

c) $X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ d) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4 Wyznaczniki

1. Obliczyć wyznaczniki rozwijając je względem wskazanych wierszy lub kolumn (w zadaniach od f) do k), w dalszych obliczeniach, można zastosować metody Sarrusa)

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{4} & -5 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} \mathbf{3} & -2 \\ \mathbf{-5} & 4 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ \mathbf{-3} & 4 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{-3} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 2 & 4 & 1 \\ \mathbf{2} & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{g)} \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{h)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ -1 & \mathbf{2} & 4 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{j)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}, \quad \text{k)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Odp.: a) -22, b), c) 2, d), e) -17, f),g),h) 18, i), j) -32, k) 312.

2. Obliczyć wyznaczniki macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3-2i & -2+i \\ -2-i & 3+2i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4-3i & 2+3i \\ -2-i & i \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1+i & 4-i & i \\ 2+i & 4-3i & 3-i \\ i & 2-2i & 1-i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1-i & 3-2i & 2+i \\ -i & 4-3i & 3 \\ 4+3i & 1-2i & 1-3i \end{bmatrix}.$$

Odp.: $\det A = 8$, $\det B = 4+12i$, $\det C = -2+19i$, $\det D = -5-30i$.

3. Rozwiązać równania i nierówności

$$\text{a)}\ \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{bmatrix} = 0, \quad \text{b)}\ \det \begin{bmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x+3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\text{d)} \begin{vmatrix} 2 & x+3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & x+1 \end{vmatrix} > 0, \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

Odp.:
a) $x=-2, x=1$, b) $x=0, x=-2$, c) $x=0, x=-8$, d) $x \in (-8, 0)$, e) $x \in (-6, -4)$.

4. Stosując operacje na wyznacznikach obliczyć

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & 1 & 13 & 19 \end{vmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{e)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \text{h)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odp.: a) 18, b) 48, c) 0, d) 1060, e) -4,
f) 12, g) 12, h) -512.

5. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy

$$\text{a)}\ A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} \ \text{Odp.}: \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \ \text{Odp}: \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ Odp. : $\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Odp : $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Rozwiązać równania macierzowe

$$\text{a) } X \cdot A = B, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } 2YA = B + YC, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Odp. a)$X = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, b) $Y = \begin{bmatrix} \frac14 & 0 & \frac14 \\ 0 & \frac14 & 0 \\ \frac14 & 0 & \frac14 \end{bmatrix}$, c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5 Wartości własne macierzy

1. Jadnym z pierwiastków charakterystycznych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & a \\ -2 & a & 6 \end{bmatrix}$$

jest liczba 3. Wyznaczyć wartości parametru a oraz pozostałe pierwiastki. Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A.
Odp.$a = 2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$
characteristic polynomial: $\left(X^3 - 18X^2 + 99X - 162\right)$,
eigenvalues: $6, 3, 9$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 6, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 3, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 9,$
$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix} 38 & -4 & 14 \\ -4 & 26 & -10 \\ 14 & -10 & 35 \end{bmatrix}$

$$a = -2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

characteristic polynomial: $X^3 - 18X^2 + 99X - 162$,
eigenvalues: $6, 3, 9$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 3, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 9, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 6,$
$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix} 38 & 4 & 14 \\ 4 & 26 & 10 \\ 14 & 10 & 35 \end{bmatrix}$

2. Jadnym z pierwiastków charakterystycznych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & a \end{bmatrix}$$

jest liczba 3. Wyznaczyć wartości parametru a oraz pozostałe pierwiastki. Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A.
Odp.

$$a = 7 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

characteristic polynomial: $\left(X^3 - 18X^2 + 99X - 162\right)$,
eigenvalues: $6, 3, 9$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 3, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 9, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 6,$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix} 35 & 14 & -10 \\ 14 & 38 & -4 \\ -10 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A.
Odp.
characteristic polynomial: $(X - 3)\left(X^2 - 12X + 11\right)$,
eigenvalues: $3, 11, 1$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 11, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 12 \\ 0 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

4. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Korzystając z Tw. Cayleya-Hamiltona obliczyć macierz odwrotną do A.
Odp.
characteristic polynomial: $X^3 - 14X^2 + 55X - 42$,
eigenvalues: $1, 6, 7$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 1, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 7, \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 6,$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{42}\begin{bmatrix} 36 & 12 & -6 \\ 12 & 11 & -2 \\ -6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

5. Wyznaczyć pierwiastki charakterystyczne oraz wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Czy istnieje macierz odwrotna do A?
Odp.
characteristic polynomial: $X^3 - 9X^2 + 18X$,
eigenvalues: $0, 6, 3$,
eigenvectors: $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 3, \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\} \leftrightarrow 6,$

6 Układy równań liniowych

1. Rozwiązać podane układy równań

$$\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ x-y+2z=13 \\ 3x+2y+3z=5 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{z=3, x=2, y=-5\}$$

$$\begin{cases} 2x+2y=-3 \\ 2x-2y+z=5 \\ y+2z=-2 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{z=0, x=\tfrac{1}{2}, y=-2\right\}$$

$$\begin{cases} 3x-z=2 \\ 4x-y-2z=2 \\ 2y+z=\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{x=\tfrac{1}{2}, y=1, z=-\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\begin{cases} x+3y+3z=1 \\ x+2y+z=-2 \\ x-y+2z=1 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{y=-\tfrac{3}{7}, z=\tfrac{12}{7}, x=-\tfrac{20}{7}\right\}$$

$$\begin{cases} x+3y-5z=9 \\ -x+2y-5z=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{y=0, x=\tfrac{1}{2}, z=-\tfrac{17}{10}\right\}$$

$$\begin{cases} -2x-y+3z=-4 \\ 3x+y-5z=5 \\ x-y-z=-3 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=3, z=-1, x=-1\}$$

$$\begin{cases} -2x+y=-2 \\ 3x+y+z=13 \\ -x+3y+z=9 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=2x-2, z=-5x+15, x=x\}$$

$$\begin{cases} 3x+y+z+t=6 \\ -y+2z+t=2 \\ x+y+3z+t=2 \\ y+2z+t=0 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{z=0, x=2, y=-1, t=1\}$$

$$\begin{cases} x-y+z+3t=2 \\ x+y+z+2t=9 \\ -x-y+3z+t=11 \\ 2x+y+z+t=2 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{y=\tfrac{107}{22}, z=\tfrac{65}{22}, t=\tfrac{30}{11}, x=-\tfrac{47}{11}\right\}$$

$$\begin{cases} 2x+y+z-t=2 \\ x+2y+z+2t=9 \\ 4x-y+t=-6 \\ 2x+y+z+t=4 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=3, x=-1, t=1, z=2\}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z+2t=5 \\ x+2y+3z+2t=9 \\ x+2y+z+3t=7 \\ y+2z+t=4 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{x=2, t=0, y=2, z=1\}$$

$$\begin{cases} 2x+2y-4z-2t=0 \\ -x-2y+2z+t=-2 \\ 2x+y-4z-t=-4 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=2, x=2z-4, t=-2, z=z\}$$

$$\begin{cases} 3x-2y+2z+t=-1 \\ 2x+3y-z+3t=2 \\ 4x-7y+5z-t=-4 \\ -x+5y-3z+2t=3 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{z=z, x=\tfrac{9}{7}y-z-\tfrac{5}{7}, t=-\tfrac{13}{7}y+z+\tfrac{8}{7}, y=y\right\}$$

$$\begin{cases} x+3y+2z+t=2 \\ -2x+y-4z-t=3 \\ x+2y+2z+2t=-1 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{z=z, y=\tfrac{5}{4}, x=-2z, t=-\tfrac{7}{4}\right\}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z-3t=1 \\ 3x+y-2z+t=-2 \\ -x-y+2z+2t=0 \\ 4x+2y+3z=1 \end{cases} \begin{matrix} 2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{matrix}, \text{ rank: } 3 \quad \begin{matrix} 2 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}, \text{ rank: } 4$$

$$\begin{cases} -x-2y+2z+4t=1 \\ -2x+y-4z+t=-2 \\ -2x-2y-z+2t=3 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{x=-\tfrac{30}{13}y-\tfrac{63}{13}, z=\tfrac{16}{13}y+\tfrac{31}{13}, y=y, t=-\tfrac{9}{13}y-\tfrac{28}{13}\right\}$$

$$\begin{cases} 3x-2y+2z+t=3 \\ 2x+2y-z+3t=-1 \\ x+6y-4z+5t=-5 \\ 3x+8y-5z+8t=-6 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{z=z, x=\tfrac{8}{7}y-z+\tfrac{10}{7}, t=-\tfrac{10}{7}y+z-\tfrac{9}{7}, y=y\right\}$$

$$\begin{cases} x-y+z+t=1 \\ x-y+z-t=-1 \\ x-y+z+5t=5 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{z=z, x=y-z, t=1, y=y\}$$

$$\begin{cases} x+2y-6z=-2 \\ x+y-2z=1 \\ x+2y+2z=6 \\ x+4y-6z=2 \end{cases} \begin{matrix} 1 & 2 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \end{matrix}, \text{ rank: } 4$$

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 3x+4y+2z=7 \\ x+y+5z=-7 \\ 2x+3y-3z=14 \end{cases}, \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{matrix}, \text{ rank: } 3 \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{matrix}, \text{ rank: } 3$$

$$\begin{cases} 3x+2y-10z=-3 \\ 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=2, x=1, z=1\}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 7x-t=3 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{cases} \text{ sprzeczny}$$

$$\begin{cases} 6x-3y+z-t=3 \\ 6x-3y-3t=6 \\ 9x-z+t=-9 \\ 6x+6y-2z+5t=-18 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{x=0, y=2, z=5, t=-4\}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-z+5t=0 \\ 3x-y+2z-7t=0 \\ 3x+3y-7z+13t=0 \\ 5x-y+z-t=0 \end{cases}, \text{ Odp.: } \{y=0, t=0, x=0, z=0\}$$

$$\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-z+11t=5 \end{cases}, \text{ Odp.: } \left\{z=0, y=-\tfrac{7}{5}t+\tfrac{3}{5}, x=-\tfrac{6}{5}t+\tfrac{4}{5}, t=t\right\}$$

7 Granice ciągu

Określić symbol granicy i obliczyć:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}, Odp.: 0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+5}{4n-7}, Odp.: \frac{3}{4},$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^2+7n-2}{3n^2+4n-7}, Odp.: -\frac{5}{3},$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-5n^2+7n-2}{4n-7}, Odp.: -\infty,$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-2}{4n^2+5n-7}, Odp.: 0,$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n^2+5n-3}{7-3n^2}, Odp.: -\infty,$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+6n-1}{3n-7}, Odp.: \infty,$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+2n-3}{4n^2-9}, Odp.: \frac{5}{4},$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-5n^2+2n-3}{3n^3-4n^2-9n+2}, Odp.: 2,$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right), Odp.: 0,$

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+5n}\right), Odp.: -\frac{5}{2},$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\sqrt{9n^2+6n-15}\right), Odp.: -1,$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right), Odp.: \frac{1}{2},$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}} : 1,$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n} Odp.: \sqrt{2}-2,$

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n^2+2n-5}-n\sqrt{3}\right),$
$Odp.: \frac{1}{3}\sqrt{3},$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+4n^2}-n\right), Odp.: \frac{4}{3},$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}\right), Odp.: -\frac{5\sqrt[3]{2}}{6},$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}, Odp.: \frac{\sqrt{2}}{2},$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right),$
$Odp.: 1,$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n, Odp.: e^2,$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n, Odp.: e^5,$

23) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n}\right)^{-n+3}, Odp.: e^4,$

24) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}, Odp.: e^6,$

25) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^{2n-1}, Odp.: e^6,$

26) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-6}\right)^{2n}, Odp.: e^{12},$

27) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^n, Odp.: e,$

28) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n, Odp.: 0,$

29) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2+2n+2}\right)^{n^2-5n+2},$
$Odp.: \infty,$

30) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n-5}{n^2+2n+2}\right)^{-5n+2}, Odp.: e^{-5};$

31) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}-5}{2^{2n}-7}, Odp.: \frac{1}{4},$

32) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}, Odp.: \frac{5}{4},$

33) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}, Odp.: \frac{48}{5},$

34) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+2}}, Odp.: -1,$

35) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{9^n+8^n+7^n}, Odp.: 9,$

36) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}, Odp.: e^{\ln 3-\ln 4},$

37) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}, Odp.: 1,$

38) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}, Odp.: \frac{4}{3},$

: : :

8 Granice funkcji

Znaleźć granice funkcji:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-3x^2}{1+x+3x^2}, Odp.: -1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right), Odp.: 0$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}, Odp.: 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, Odp.: \frac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}, Odp.: \frac{1}{4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}, Odp.: 0$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}, Odp.: \text{undefined}$

8) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}, Odp.: -\frac{2}{5}$

9) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}, Odp.: 6$

10) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right), Odp.: -1$

11) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20}, Odp.: -6$

12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+125}{2x^2-50}, Odp.: -\frac{21}{8}$

13) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}, Odp.: 1$

14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, Odp.: 0$

15) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, Odp.: 3$

16) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}, Odp.: \frac{1}{4}$

17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}, Odp.: \frac{2}{3}$

18) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}, Odp.: 0$

19) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right), Odp.: \frac{1}{2}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}, Odp.: 3$

21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x}{\sin 5x}, Odp.: \frac{1}{5}$

22) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, Odp.: \frac{1}{2}$

23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x^3}, Odp.: \frac{1}{2}$

24) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{tgx}\right), Odp.: 0$

25) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}, Odp.: \frac{1}{2}\sqrt{2}$

26) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{tg} x, Odp.: 1$

27) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}, Odp.: 2$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}, Odp.: 1$

29) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}, Odp.: e^6$

30) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}, Odp.: e^{-1}$

31) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}, Odp.: 1$

32) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}, Odp.: e^{-\frac{2}{3}}$

33) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-2}\right)^{x}, Odp.: 0$

34) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^{2x-1} : \infty$

35) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x} : \dfrac{1}{a}$

36) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x} : k$

9 Reguła de L'Hospitala

Obliczyć granice funkcji stosując regułę de L'Hospitala:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}, Odp.: 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}, Odp.: 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\text{arctg}x}{x^3}, Odp.: \frac{1}{3}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\text{tg}x}, Odp.: -\frac{1}{2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}, Odp.: 2$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}, Odp.: 1$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}, Odp.: 1$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}, Odp.: 2$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right), Odp.: -1$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right), Odp.: 0$

11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right), Odp.: \frac{1}{2}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right), Odp.: 0$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right), Odp.: -\frac{1}{2}$

14) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{a}{x}, Odp.: 0$

15) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}-1}), Odp.: \infty$

16) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\dfrac{1}{x^2}}, Odp.: \infty$

17) $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x), Odp.: 0$

18) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}, Odp.: \frac{2}{\pi}$

19) $\lim\limits_{x\to\dfrac{\pi}{2}}(\text{tg}x)^{2x-\pi}, Odp.: 1$

20) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}, Odp.: 1$

21) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}}, Odp.: e$

22) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\dfrac{1}{x}}, Odp.: e^2$

23) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}, Odp.: 1$

24) $\lim\limits_{x\to a}(2-\dfrac{x}{a})^{\text{tg}\dfrac{\pi x}{2a}}, Odp.: e^{\dfrac{2}{\pi}}$